MAT 201 : Analyse dans les espaces vectoriels normés

Sylvain Lavau

Galatasaray Üniversitesi

Table des matières

Remerciements. *Ces notes de cours s'appuient sur plusieurs manuscrits, dont :*

— *F. Liret et D. Martinais,* Analyse 2ème année*, Dunod.*
— *R. Bartle et D. Sherbert,* Introduction to Real Analysis*, John Wiley & Sons.*
— *les cours en ligne de G. Lavau https://gerardlavau.fr/*
— *le cours de D. Choimet au Lycée du Parc sur l'année 2007-08*

Le présent manuscrit contient plusieurs images tirées de ces ressources, ainsi que de Wikipedia. Il y a bien sûr encore des fautes et des approximations donc n'hésitez pas à m'en faire part.

1 Suites et convergence dans les espaces vectoriels normés

1.1 Suites de fonctions et convergence

Dans ce chapitre on va regarder les suites et séries de fonctions $f_n : D \to \mathbb{R}$ sur un domaine $D \subset \mathbb{R}$ (la généralization à $\mathbb{C}$ se fait sans trop de problèmes). On appelle *suite de fonctions* une famille de fonctions $f_n : D \to \mathbb{R}$ indexées sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, f_n est une fonction de D dans $\mathbb{R}$. L'ensemble de définition D est le même pour toutes les fonctions de la famille. Comme on peut s'y attendre, on s'interroge sur la convergence ou non (et à quel sens) de cette suite de fonctions. Commençons par souligner que si on fixe un élément $x \in D$, alors $f_n(x) \in \mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc la famille $(f_n(x))_n$ est une suite de nombres réels.

Définition 1.1. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction (dont on ne suppose rien du tout). Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions $f_n : D \to \mathbb{R}$. On dit que la suite $(f_n)_n$* converge simplement *vers f si, pour tout $x \in D$, la suite réelle $(f_n(x))_n$ converge et admet comme limite $f(x)$:*

$$\lim_{n\to+\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

On appelle $f : D \to \mathbb{R}$ la limite simple *de la suite de fonctions $(f_n)_n$.*

La condition ci dessus peut s'écrire sous forme de proposition logique :

$$\forall\, x \in D,\ \forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \forall\, n \geq N \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \tag{1.1}$$

Attention dans cette proposition logique, N dépend de x et de ϵ !

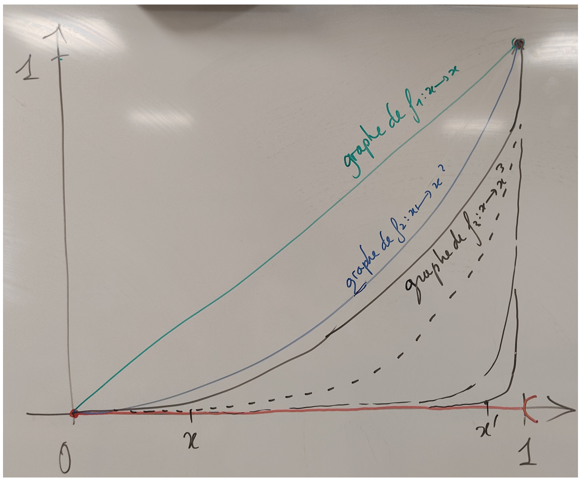
Exemple 1.2. Regardons convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_n$ définies par $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^n$. Si $x \in [0,1[$, $f_n(x)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini car c'est la définition d'une suite géométrique $(x^n)_n$ pour $|x| < 1$. Par contre, si $x = 1$, pour tout $n \geq 0$, $f_n(1) = 1$ et la suite réelle $(f_n(1))_n$ est la suite constante égale à 1, qui donc converge vers 1. Définissons la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } 0 \leq x < 1 \\ 1 \text{ si } x = 1 \end{cases}$$

Alors la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction f (discontinue en 1).

On peut représenter graphiquement le processus par le dessin de droite. Les graphes des fonctions f_n deviennent de plus en plus "carrés" avec l'angle en bas à droite. Si on fixe $x \in [0,1[$, à un moment donné (pour n assez grand), le point $f_n(x)$ se rapprochera aussi près que l'on veut de l'axe horizontal. Par contre le point $f_n(1) = 1$ reste inchangé pour toutes les fonctions. Toutes les fonctions f_n sont continues, mais à la limite donc, on obtient une fonction f discontinue (en 1). Nous avons donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to 1} f_n(x) \quad \neq \quad \lim_{x\to 1} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$$



Exemple 1.3. La suite de fonctions $(f_n)_n$ définies par $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\sin(nx)}{n}$ converge simplement vers f la fonction nulle. En effet, nous savons que $|\sin(u)| \leq 1$ pour tout $u \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$, nous avons donc pour tout $n \geq 1$:

$$0 \leq \left| \tfrac{\sin(nx)}{n} - 0 \right| \leq \frac{1}{n}$$

Le membre de droite tend vers 0 quand n tend vers l'infini, donc le membre de gauche aussi (et ce pour tout x), et nous avons bien la convergence simple de la suite $(f_n)_n$ vers la fonction nulle. On peut écrire les premières fonctions f_n grâce aux identités trigonométriques :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sin(x), \qquad f_2(x) = \frac{\sin(2x)}{2} = \sin(x)\cos(x), \\ f_3(x) &= \frac{\sin(3x)}{3} = \frac{\sin(2x)\cos(x)}{3} + \frac{\cos(2x)\sin(x)}{3} = \frac{\sin(x)\cos^2(x)}{3} + \frac{(\cos^2(x) - \sin^2(x))\sin(x)}{3} \\ &= \frac{2\sin(x)\cos^2(x) - \sin^3(x)}{3} = \sin(x)\cos^2(x) - \frac{\sin(x)}{3} \end{aligned}$$

On peut "voir" que les fonctions deviennent de plus en plus petites en amplitude maximale (la suite $(f_n)_n$ tend bien vers la fonction nulle).

Exemple 1.4. La suite de fonctions $(f_n)_n$ définies par $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ converge simplement vers la fonction valeur absolue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x^2} = |x|$. On voit que toutes les fonctions f_n sont dérivables sur $\mathbb{R}$ puisque $f_n'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}}$, mais f ne l'est pas en 0 ! Donc on voit que la convergence simple peut aussi perdre certaines propriétés (ici on a perdu la dérivation en zéro). Donc dans cet exemple on ne peut pas intervertir dérivation et limite :

$$\frac{d}{dx}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) \quad \neq \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{df_n}{dx}(x)$$

C'était en réalité aussi le cas dans l'exemple précédent.

Exemple 1.5. La suite de fonctions $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{x+n}$ converge simplement vers la fonction f identiquement nulle sur $[0, +\infty[$. L'intégrale de f sur cet intervalle est nulle, mais pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\int_0^M f_n(x)dx = \int_0^M 1 - \frac{n}{n+x}dx = \int_0^M 1 - \int_0^M \frac{1}{1+\frac{x}{n}}dx = M - n\ln(1 + \tfrac{M}{n})$$

L'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$ est obtenue en faisant tendre M vers $+\infty$. Mais dans ce cas le membre de droite tend alors vers l'infini car le logarithme $M \mapsto \ln(1 + \frac{M}{n})$ augmente moins vite que la fonction linéaire $M \mapsto M$, donc l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$ est divergente (vaut $+\infty$). Donc on voit que dans cet exemple que :

$$\int_0^{+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)dx \quad \neq \quad \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$$

En résumé, avoir que toutes les fonctions $f_n : D \to \mathbb{R}$ sont continues n'implique PAS que la fonction limite simple $f : D \to \mathbb{R}$ est continue ; que toutes les f_n sont bornées n'implique PAS que f est bornée (cf + bas) ; que toutes les f_n sont intégrables (resp. dérivables) n'impliquent PAS que f est intégrable (resp. dérivable)... La notion de convergence simple est donc très fragile car aucune des propriétés des fonctions ne sont préservées à la limite. Il faut d'autre notion de convergence, avec un autre choix de norme sur l'espace des fonctions.

Définition 1.6. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions $f_n : D \to \mathbb{R}$ et soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que la suite $(f_n)_n$* converge uniformément *vers f si pour tout n assez grand la fonction $f_n - f$ est bornée, et que*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = 0 \tag{1.2}$$

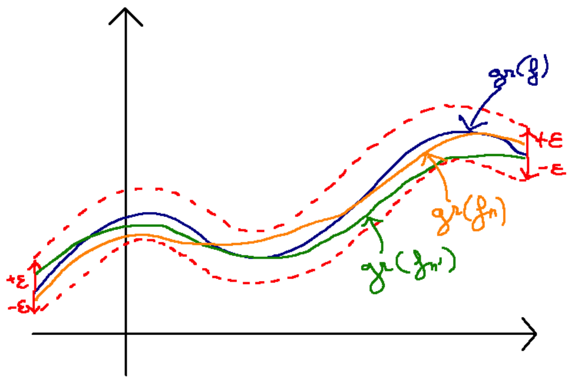
On appelle $f : D \to \mathbb{R}$ la limite uniforme *de la suite de fonctions $(f_n)_n$.*

La condition incongrue "pour tout n assez grand la fonction $f_n - f$ est bornée" est là pour justifier que pour n assez grand, la borne supérieure $\sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)|$ – le plus petit majorant de l'ensemble $A_n = \{|f_n(x) - f(x)|,\ \text{où } x \in D\}$– est bien définie. Dans ce cas, prendre la limite $n \to +\infty$ est possible. La condition (1.2) peut se réécrire avec des quantificateurs comme :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \forall n \geq N,\ \forall x \in D \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \tag{1.3}$$

Attention la position du quantificateur $\forall x \in D$ n'est pas la même que dans le phrase logique (1.1). Dans la convergence uniforme, N ne dépend que de ϵ mais PAS de x !

La convergence uniforme est plus forte que la convergence simple. Elle peut s'interpréter ainsi : fixons $\epsilon > 0$; alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que tout $n \geq N$, la distance entre le graphe de la fonction f_n et le graphe de la fonction f ne dépasse jamais ϵ. Cela se traduit par le fait que pour tout $x \in D$, $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ pour tout $n \geq N$. Cette idée est illustrée sur l'image à droite, où on a pris $n, n' \geq N$. Le ruban entre pointillés rouges est appelé *voisinage tubulaire* du graphe de f de rayon ϵ.



On peut comparer la convergence simple et la convergence uniforme de façon intuitive en terme de vitesse de convergence. Si une suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction f, la vitesse de convergence dépend du point x ; c'est à dire que pour certains x, la suite $(f_n(x))_n$ tend plus vite vers $f(x)$ que pour certains autres x. Penser par exemple à la suite de fonctions $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^n$ qui converge simplement vers la fonction f de l'exemple 1.2, et comparer la vitesse de convergence de la suite en $x = 0,001$ et $x = 0,999$: on converge beaucoup plus vite vers 0 en $x = 0,001$ qu'en $x = 0,999$.

Par contre, si la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction f, la vitesse de convergence *ne dépend pas* de l'endroit où on se place sur l'axe horizontal. Comme le mot l'indique, la vitesse de convergence se fait uniformément sur tout le domaine de définition. On peut le voir dans l'exemple 1.10 ci dessous, où la convergence vers f est contrôlée par la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_n$. Dans la suite pour distinguer la convergence simple et uniforme, on notera :

convergence simple	$f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{CVS} f$
convergence uniforme	$f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{CVU} f$

Remarque 1.7. Soit D un domaine de $\mathbb{K}$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $f : D \to \mathbb{K}$ une fonction bornée. On définit alors la notation suivante :

$$||f||_\infty = \sup_{x \in D} |f(x)|$$

Lorsque f n'est pas bornée, la borne supérieure n'est pas définie (n'existe pas), et donc ça n'a pas de sens mathématique d'écrire $||f||_\infty$. L'opération $f \mapsto ||f||_\infty$ définit une norme sur l'espace des fonctions définies sur l'ensemble D (nous verrons plus bas ce qu'est une norme). On l'appelle la *norme infinie*. Noter alors que la condition (1.2) dans la définition de la convergence uniforme peut s'écrire :

$$\lim_{n \to +\infty} ||f_n - f||_\infty = 0 \tag{1.4}$$

Cette formule est importante ! On retrouve l'idée qu'une suite converge vers une limite.

Exemple 1.8. Soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par :

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 + \frac{x}{n})^n = e^x$, donc la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction exponentielle : $f(x) = e^x$. Par contre, elle ne converge pas uniformément, car pour tout $n \geq 1$, la fonction $x \mapsto |f_n(x) - f(x)|$ n'est pas bornée (il suffit de faire tendre x vers $+\infty$). Donc la borne supérieure $\sup\limits_{x \in D} |f_n(x) - f(x)|$ n'est pas définie, et la condition (1.2) ne peut pas être satisfaite.

Exemple 1.9. Soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par $f_n : x \mapsto \frac{1}{1+|x-n|}$. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $f_n(x)$ tend vers 0 quand n vers l'infini. La fonction limite simple est donc la fonction constante $f \equiv 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est positive est majorée par 1 (valeur atteinte en $x = n$). La différence $|f_n(x) - f(x)| = f_n(x)$ est donc bornée MAIS la condition (1.2) n'est pas satisfaite car $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} f_n(x) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc ne peut pas converger vers 0. La suite de fonctions $(f_n)_n$ ne converge donc pas uniformément vers f.

Exemple 1.10. Soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} \text{ si } x = 0 \\ \frac{1}{x}\sin\left(\frac{x}{n}\right) \text{ si } x \neq 0 \end{cases}$$

Ces fonctions sont continues en zéro (elles généralisent la fonction $\frac{\sin(x)}{x}$). A x fixé, si on fait tendre n vers l'infini, on obtient que $f_n(x)$ tend vers 0, quel que soit x. La limite simple $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la suite de fonctions $(f_n)_n$ est donc la fonction constante nulle, ce qu'on dénote $f \equiv 0$.

En ce qui concerne la convergence uniforme, on observe que pour tout u nombre réel, on a $|\sin(u)| \leq |u|$. Nous avons alors que $\left|\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right| \leq \frac{|x|}{n}$ et donc $\left|\frac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x}\right| \leq \frac{1}{n}$. On a donc la majoration suivante, pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé :

$$0 \leq |f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x} - 0\right| \leq \frac{1}{n}$$

Cette majoration étant vraie indépendamment du point x, nous en déduisons que :

$$0 \leq \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}$$

En prenant la limite quand n tend vers l'infini, nous obtenons donc, par le théorème des encadrements :

$$\lim_{n\to+\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Ceci prouve que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle.

Exemple 1.11. Regardons la suite de fonctions $(f_n)_n$ définies par $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{n}{n+e^x}$. Soit $x \in \mathbb{R}$; la limite de la suite réelle $(f_n(x))_n$ quand n tend vers l'infini est donnée par l'équivalent :

$$\frac{n}{n+e^x} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n}{n} = 1$$

Ceci étant vrai quelle que soit la valeur de x, la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction constante $f \equiv 1$. Maintenant évaluons la différence suivante :

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{n}{n+e^x} - 1\right| = \frac{e^x}{n+e^x} = \frac{1}{1+ne^{-x}}$$

Si on évalue cette fonction de x au point $x = \ln(n)$, on a alors $|f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{1}{2}$. Autrement dit, on a une minoration de la borne supérieure $\sup\limits_{x\in D} |f_n(x) - f(x)|$, ce qu'on peut écrire :

$$\frac{1}{2} \leq ||f_n - f||_\infty$$

Cette minoration est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, puisqu'en définissant la suite réelle $(x_n)_n$ par $x_n = \ln(n)$, nous observons que la suite réelle $\big(|f_n(x_n) - f(x_n)|\big)_n$ est la suite constante dont tous les termes sont égaux à $\frac{1}{2}$. Chaque terme de cette suite minimise la borne supérieure

$||f_n - f||_\infty$, donc la minoration $\frac{1}{2} \leq ||f_n - f||_\infty$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Autrement dit la suite réelle positive de normes infinies $\left(||f_n - f||_\infty\right)_n$ est minorée par $1/2$, donc la suite $\left(||f_n - f||_\infty\right)_n$ ne peut pas converger vers 0 quand n tend vers l'infini. De ce fait, on voit que nous ne pouvons pas avoir la condition de convergence uniforme.

Dans les deux exemples précédents, nous avons vu deux cas différents : une suite de fonctions uniformément convergente, et une suite de fonction non-uniformément convergente. Discutons un peu de quelles sont les stratégies à mettre en oeuvre pour montrer l'un ou l'autre cas. Pour montrer une convergence uniforme, il faut vérifier la condition suivante (1.2). On peut récrire cette formule en définissant le sous-ensemble de $\mathbb{R}_+$ suivant :

$$A_n = \{|f_n(x) - f(x)|, \text{ où } x \in D\}$$

Cela permet de récrire la condition (1.2) de convergence uniforme comme :

$$\lim_{n \to +\infty} \sup(A_n) = 0$$

où ici la borne supérieure est bien la borne supérieure ensembliste des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ (qui n'est bien définie que lorsque A_n est majoré donc). Calculer la borne supérieure $\sup\limits_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = \sup(A_n)$ pour tout n peut être compliqué. A la place on peut chercher à majorer les sous-ensembles A_n par une suite réelle positive $(u_n)_n$ qui converge vers 0, c'est à dire :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq A_n \leq u_n \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$

En effet, si on a une suite $(u_n)_n$ telle que, pour tout n, on a $\forall\, u \in A_n, 0 \leq u \leq u_n$, alors nécessairement pour tout n on a l'encadrement $0 \leq \sup\limits_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \leq u_n$; si d'autre part cette suite $(u_n)_n$ converge vers 0, alors on a bien que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sup\limits_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = 0$.

Maintenant, dans le cas contraire, si une suite de fonctions $(f_n)_n$ ne converge PAS uniformément vers une fonction f, alors la proposition logique (1.3) n'est pas vraie, c'est sa négation qui est vraie :

$$\exists\, \epsilon > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall\, N \in \mathbb{N},\ \exists\, n \geq N,\ \exists\, x \in D \quad \text{tels que} \quad |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon$$

On peut la récrire de façon équivalente comme :

$$\exists\, \epsilon > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall\, N \in \mathbb{N},\ \exists\, n \geq N,\ \exists\, x_n \in D \quad \text{tels que} \quad |f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \epsilon$$

Autrement dit, lorsque $(f_n)_n$ ne converge PAS uniformément vers une fonction f, il existe une suite $(x_n)_n$ de points de D telle que la suite réelle positive $(a_n)_n$ de terme général $a_n = |f_n(x_n) - f(x_n)|$ ne converge PAS vers 0 (c'est la signification du début de la phrase logique ci dessus). On a donc une méthode pour démontrer qu'une suite de fonctions ne converge pas uniformément.

Procédure générale à suivre : dans le cas général où on s'intéresse à une suite de fonctions, on cherche d'abord la limite simple des $f_n : D \to \mathbb{R}$ – qu'on dénote $f : D \to \mathbb{R}$ – puis, une fois trouvée, on essaie

1. soit de majorer l'ensemble $A_n = \{|f_n(x) - f(x)|,\ x \in D\}$ par une suite positive $(u_n)_n$ qui converge vers 0. Si les fonctions f_n sont positives, en général on peut calculer la dérivée de $f_n - f$ par rapport à x et on prend la valeur $u_n = f_n(x) - f(x)$ en le point x où cette dérivée s'annule (là où $f_n - f$ atteint un max). Si la suite $(u_n)_n$ tend vers 0, la convergence uniforme est ainsi montrée ;

2. ou bien, de trouver une suite $(x_n)_n$ d'élément de D, telle que la suite $(a_n)_n$ de terme général $a_n|f_n(x_n) - f(x_n)|$ ne converge pas vers 0. Par exemple en choisissant une suite $(x_n)_n$ telle que $(a_n)_n$ converge vers une limite non-nulle, cela convient. En général, en regardant la forme des fonctions f_n, on essaie de faire disparaitre n en choisissant astucieusement x_n, ou bien dans le pire des cas à contrôler la variable n. Avec une telle suite $(x_n)_n$, cela démontre que la suite de fonctions ne converge pas uniformément.

Exemple 1.12. La suite de fonctions de l'exemple 1.2, où $f_n : x \mapsto x^n$, ne converge pas uniformément car si on pose $x_n = 1 - \frac{1}{n} < 1$, on a que $f(x_n) = 0$ donc $a_n = |f_n(x_n) - f(x_n)| = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$. On a que $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e}$ donc la suite $(a_n)_n$ converge vers $\frac{1}{e} \neq 0$. A partir d'un certain rang N, les éléments a_n sont donc *au dessus* de $\epsilon = \frac{1}{2e}$. Donc la borne supérieure de l'ensemble A_n, étant plus grande que a_n, est donc elle aussi nécessairement au dessus $\epsilon = \frac{1}{2e}$. On en déduit que la suite $\left(\sup(A_n)\right)_n$ ne peut pas tendre vers 0 car minorée à partir d'un certain rang par une constante strictement positive. Cela montre que la suite de fonctions de l'example 1.2 ne converge pas uniformément.

Exemple 1.13. Soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions $f_n : [1, b] \to \mathbb{R}$ définies par $f_n : x \mapsto \frac{2nx^2-1}{nx+x^2}$. A x fixé, on a l'équivalent suivant lorsque n tend vers l'infini :

$$\frac{2nx^2 - 1}{nx + x^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{2nx^2}{nx} = 2x$$

donc la suite de fonctions tend simplement vers la fonction $f : [1, b] \to \mathbb{R}, x \mapsto 2x$. Maintenant, à x fixé, la différence $|f_n(x) - f(x)|$ est :

$$\left|\frac{2nx^2 - 1}{nx + x^2} - 2x\right| = \frac{2x^3 + 1}{nx + x^2}$$

On aimerait majorer le membre de droite par une suite u_n qui tend vers 0. Pour cela, il suffit de majorer le numérateur, et de minorer le dénominateur. Or nous avons $1 \leq x \leq b$ donc $2x^3 + 1 \leq 2b^3 + 1$ et $n + 1 \leq nx + x^2$, ce qui donne que pour tout $x \in [1, b]$ on a :

$$0 \leq \left|\frac{2nx^2 - 1}{nx + x^2} - 2x\right| = \frac{2x^3 + 1}{nx + x^2} \leq \frac{2b^3 + 1}{n + 1}$$

On pose $u_n = \frac{2b^3+1}{n+1}$ et donc d'après l'inégalité ci dessus vraie pour tout $x \in [1, b]$, on a que $0 \leq \sup(A_n) \leq u_n$. En observant que la suite $(u_n)_n$ converge vers 0, d'après la discussion ci-dessus, cela nous dit que la suite de fonctions f_n converge uniformément vers f. Attention, la convergence uniforme se fait sur le segment $[1, b]$, ça ne converge plus uniformément sur $[1, +\infty[$, car la majoration par b ne marche plus.

Proposition 1.14. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions $f_n : D \to \mathbb{R}$ qui converge uniformément vers une fonction $f : D \to \mathbb{R}$. Alors la suite de fonctions converge uniformément vers f sur tout segment $[a, b] \subset D$.*

Démonstration. Cela vient de la majoration simple $0 \leq \sup\limits_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \leq \sup\limits_{x \in D} |f_n(x) - f(x)|$. □

Attention, la réciproque est fausse : une suite de fonctions $(f_n)_n$ définies sur un domaine de définition D peut converger uniformément vers une fonction f sur tout segment $[a, b] \subset D$, mais pas sur D tout entier. Cela s'explique car un segment est fermé borné (on appelle ça un compact en topologie), tandis que D peut être ouvert à un des bords, où les fonctions $f_n - f$ peuvent ne pas être bornées.

Exemple 1.15. Reprenons l'exemple 1.13 mais cette fois ci les fonctions $f_n : x \mapsto \frac{2nx^2-1}{nx+x^2}$ sont définies sur $[1 + \infty[$. Cette suite de fonctions admet pour limite simple $f(x) = 2x$ comme précédemment. Maintenant observons que la différence $|f_n(x) - f(x)|$ admet l'équivalent suivant lorsque x tend vers $+\infty$:

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{2x^3 + 1}{nx + x^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2x$$

Ainsi la fonction $|f_n(x) - f(x)|$ n'est pas majorée sur $[1, +\infty[$, car le membre de droite (l'équivalent) tend vers $+\infty$ quand $x \to +\infty$, donc la borne supérieure $\sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)|$ n'est pas définie, donc la convergence de la suite $(f_n)_n$ n'est PAS uniforme sur $[1, +\infty[$. Par contre, sur tout segment (fermé borné) de type $[1, b]$ avec $b > 1$ fixé, on a vu dans l'exemple 1.13 qu'il y avait convergence uniforme.

Exemple 1.16. Dans l'exemple 1.9, nous avons vu que la suite de fonctions $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{1+|x-n|}$ ne converge pas uniformément vers la fonction constante $f \equiv 0$. Maintenant soit $b > 0$, sur le segment $[0, b]$ nous avons la majoration suivante :

$$\forall n \geq b,\ \forall x \in [0, b] \qquad |f_n(x) - f(x)| = f_n(x) \leq f_n(b)$$

Cela vient du fait que la fonction f_n est croissante sur $]-\infty, n]$, intervalle contenant $[0, b]$ dès que $n \geq b$. La majoration étant vraie pour tout $x \in [0, b]$, la borne supérieure est donc aussi majorée :

$$\forall n \geq b \qquad \sup_{x\in[0,b]} |f_n(x) - f(x)| \leq f_n(b) = \frac{1}{1 + n - b}$$

Le membre de droite tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ ce qui veut dire que la condition (1.2) est satisfaite sur le segment $[0, b]$, et la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur le segment $[0, b]$ (et plus généralement, sur tout segment de $\mathbb{R}$).

Proposition 1.17. *Si une suite de fonctions converge uniformément sur D, alors elle converge simplement sur D.*

Démonstration. Fait en exercice. □

La notion de convergence uniforme a été introduite par Cauchy au début du XIXème siècle pour répondre à la question : si on a une suite de fonctions $(f_n)_n$ continues en un point $a \in D$ convergeant vers une fonction f, comment savoir si la fonction limite f est continue en a ? Autrement dit on se demande si on peut intervertir les deux limites suivantes, et pour quelle notion de convergence :

$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x) \overset{?}{=} \lim_{x\to a} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$$

On a déjà vu dans l'exemple (1.2) que la convergence simple n'est pas suffisamment forte pour permettre l'échange des limites.

Théorème 1.18. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions $f_n : D \to \mathbb{R}$, et $a \in D$. On suppose que :*

1. *chaque fonction $f_n : D \to \mathbb{R}$ est continue en a ;*
2. *la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur D.*

Alors la fonction limite uniforme $f : D \to \mathbb{R}$ est continue en a et $f(a) = \lim_{n\to\infty} f_n(a)$.

Remarque 1.19. En réalité il suffit d'avoir que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur un voisinage de a dans D.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Ecrivons l'uniforme convergence des f_n :

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \forall x \in D \qquad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}$$

Prenons un tel N, qui ne bougera pas jusqu'à la fin de la preuve. On a alors par l'inégalité triangulaire :

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(a)| + |f_N(a) - f(a)|$$

Le premier et le dernier terme du membre de droite sont majorés par $||f_N - f||_\infty$, lui même majoré par $\frac{\epsilon}{3}$. Nous avons donc :

$$|f(x) - f(a)| \leq \frac{2\,\epsilon}{3} + |f_N(x) - f_N(a)|$$

Ecrivons ce que ça veut dire d'être continue en a pour la fonction f_N, une fois fixé ϵ :

$$\exists\,\delta > 0, \forall\,x \text{ tel que } |x - a| < \delta \qquad |f_N(x) - f_N(a)| < \frac{\epsilon}{3}$$

Choisissons x tel que $|x - a| < \delta$. On a alors par l'inégalité triangulaire :

$$|f(x) - f(a)| < \frac{2\,\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

Autrement, dit on a prouvé que si on fixe $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in]a-\delta, a+\delta[$, on a $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. C'est vrai pour tout ϵ, donc la fonction f est continue en a (c'est la définition). $\square$

Est-ce qu'il y a une réciproque ? C'est à dire si la suite de fonctions $(f_n)_n$ continues en a converge simplement vers la fonction f continue en a, a-t-on que la suite converge uniformément vers f ? Non, par exemple la suite de fonctions $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto nx^n(1-x)$ sont continues et converge simplement vers la fonction constante $f \equiv 0$, continue elle aussi. Cependant si on pose $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, on a

$$f_n(x_n) = n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

et donc $|f_n(x_n) - f(x_n)| = f_n(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e}$, donc la convergence n'est pas uniforme. Cependant, si aux deux hypothèses que les fonctions f_n et la fonction limite simple f sont continues, on rajoute l'hypothèse que $f_n \leq f_{n+1}$ pour tout n assez grand, alors la convergence de la suite $(f_n)_n$ est uniforme : c'est le Théorème de Dini.

Corollaire 1.20. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $f_n : D \to \mathbb{R}$. On suppose que :*

1. *chaque fonction f_n est continue sur D ;*
2. *la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur D.*

Alors la fonction limite uniforme $f : D \to \mathbb{R}$ est continue sur D.

La condition d'uniforme convergence est une condition *suffisante*, pas nécessaire, car il est tout à fait possible qu'on ait une suite de fonctions convergeant simplement vers une fonction continue mais pas convergence uniforme (plein d'exemples vus jusqu'ici le montrent). Notons aussi que comme la notion de continuité est locale, on n'a besoin que de la convergence uniforme locale (sur tout segment de D). Le fait qu'une suite de fonctions ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$, mais converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$ est une situation qu'on rencontre par ailleurs fréquemment (voir par exemple les Exemples 1.15 et 1.16). On peut reformuler le corollaire 1.20 en terme de convergence locale uniforme :

Corollaire 1.21. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions $f_n : D \to \mathbb{R}$. On suppose que :*

1. *chaque fonction f_n est continue sur D ;*
2. *pour tout $x \in D$, il existe un segment $I \subset D$ contenant x sur lequel la suite $(f_n)_n$ converge uniformément.*

Alors la fonction limite uniforme $f : D \to \mathbb{R}$ est continue.

Pour finir sur ce sujet, notons que la contraposée du corollaire 1.20 est l'énoncé suivant (très important à retenir !) :

Corollaire 1.22. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $f_n : D \to \mathbb{R}$. On suppose que chaque fonction f_n est continue sur D. Si la fonction limite simple $f : D \to \mathbb{R}$ n'est pas continue sur D, la suite $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sur D.*

Remarque 1.23. On dit qu'une suite de fonctions $(f_n)_n$ est uniformément bornée si

$$\exists\, M > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in D \qquad |f_n(x)| \leq M$$

autrement dit $||f_n||_\infty \leq M$ pour tout n. Dans ce cas la fonction limite (par convergence simple) est bornée par M, car par l'inégalité triangulaire on a pour tout $x \in D$:

$$|f(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x)| \leq ||f_n - f||_\infty + M$$

et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} ||f_n - f||_\infty = 0$ par convergence uniforme (voir discussion autour de la formule (1.4)), on a en passant à la limite que $|f(x)| \leq M$.

Comme pour l'interversion des deux limites $\lim\limits_{n\to+\infty}$ et $\lim\limits_{x\to a}$ permise par la convergence uniforme, nous pouvons intervertir $\lim\limits_{n\to+\infty}$ et l'intégration sur un segment $[a, b]$ (c'est important !). Attention sur un intervalle quelconque – c'est à dire pour les intégrales généralisées – la convergence uniforme ne suffit pas et il faut d'autres hypothèses additionnelles. Dans tous les cas, la condition de convergence uniforme est *suffisante* pour intervertir limite et intégrale, mais n'est pas nécessaire.

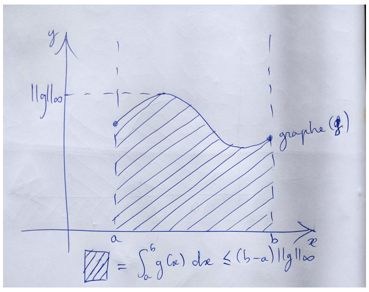
Proposition 1.24. *Soit $a < b$ deux réels, et $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$. On suppose que la suite converge uniformément vers une fonction (nécessairement continue) $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Alors la suite numérique de terme général $\int_a^b f_n(x)dx$ converge et sa limite est l'intégrale de f (autrement dit on peut permuter limite et intégrale) :*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b \underbrace{\lim_{n\to+\infty} f_n(x)}_{= f(x)}\, dx$$

Démonstration. Pour tout $n \geq 0$, on a

$$0 \leq \left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f_n - f| \leq (b-a)||f_n - f||_\infty$$

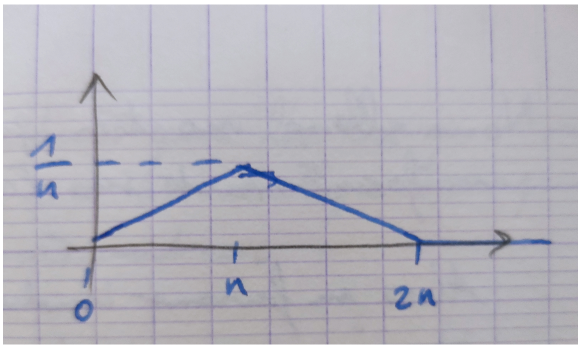
Et le membre de droite tend vers 0 quand n tend vers l'infini (définition de la convergence uniforme, voir la condition (1.4)). $\square$



Exemple 1.25. Attention l'hypothèse que la convergence uniforme se fait sur un segment $[a, b]$ est importante ! Si c'est un intervalle ouvert, la limite ne commute pas forcément avec l'intégrale. Par exemple, regardons la suite de fonctions $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définies par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{x}{n^2} \text{ si } 0 \leq x \leq n \\ -\frac{x}{n^2} + \frac{2}{n} \text{ si } n \leq x \leq 2n \\ 0 \text{ si } x \geq 2n \end{cases}$$

Soit $n \geq 1$. Le graphe de la fonction f_n est un triangle. La hauteur du triangle est le maximum de la fonction, atteint en $x = n$ et valant $f_n(n) = \frac{1}{n}$. La borne supérieure de la fonction f_n vaut donc $||f_n||_\infty = \frac{1}{n}$. Quand n augment, le triangle s'applatit. La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction constante nulle. Comme $||f_n - f||_\infty = ||f_n||_\infty = \frac{1}{n}$, la condition (1.4) est satisfaite et il y a convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_n$.



L'intégrale de la fonction limite $f \equiv 0$ est nulle. L'intégrale de la fonction f_n est l'aire du triangle de base $\frac{2}{n}$ et de hauteur $\frac{1}{n}$, donc :

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{2n \times \frac{1}{n}}{2} = 1$$

et ce pour tout $n \geq 1$. On observe donc que $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)dx \neq \int_0^{+\infty} f(x)dx$ (parce que l'intégration n'est pas sur un segment et le théorème ne s'applique pas).

La proposition 1.24 permet de retrouver des résultats bien connus sur l'intégrale de Riemann. Rappelons comment l'intégrale est définie. Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$. On définit l'intégrale de $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ par la méthode de Riemann. On dit qu'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est *étagée* – ou *en escalier* – si :

1. il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $n + 1$ points du segment $[a, b]$, tels que :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

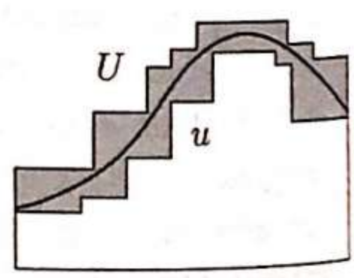
2. et f est constante sur tous les intervalles ouverts du type $]x_{i-1}, x_i[$.

Si f est étagée, alors pour tout $1 \leq i \leq n$, il existe $m_i \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = m_i$ pour tout $x \in]x_{i_1}, x_i[$. Toute fonction étagée $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ admet une intégrale, définie par :

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

Les fonctions étagées nous permettent de définir les intégrales pour des fonctions plus générales Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est *intégrable* (au sens de Riemann) si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe deux fonctions étagées $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $U : [a, b] \to \mathbb{R}$ telles que :

$$u \leq f \leq U \qquad \text{and} \qquad \int_a^b (U - u)(x)\, dx \leq \epsilon$$



Nous pouvons maintenant définir la valeur de l'intégrale d'une fonction intégrable. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Alors il existe, pour tout $\epsilon > 0$, au moins une fonction étagée $u \leq f$ et une fonction étagée $U \geq f$. Les intégrales des fonctions étagées sur $[a,b]$ sont bien définies donc on peut définir les deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants :

$$A = \left\{ \int_a^b u(x)\,dx \text{ avec } u : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ fonction étagée telle que } u \leq f \right\}$$
$$B = \left\{ \int_a^b U(x)\,dx \text{ avec } U : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ fonction étagée telle que } U \geq f \right\}$$

Pour tout $\alpha \in A$, il existe une fonction étagée $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que $\alpha = \int_a^b u$, et pour tout $\beta \in B$, il existe une fonction étagée $U : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que $\beta = \int_a^b U$. Comme par définition $u \leq f \leq U$, on a donc $u \leq U$ et donc en intégrant on a que $\alpha \leq \beta$. On en déduit que tous les éléments de A sont inférieurs ou égaux aux éléments de B. En passant à la borne supérieure et inférieure, on en déduit que $\sup(A) \leq \inf(B)$. Il se trouve que pour une fonction intégrable f, on a l'égalité $\sup(A) = \inf(B)$ (la preuve se fait avec les ϵ de la définition d'une fonction intégrable). Ce nombre unique s'appelle l'intégrale de f, et on le note :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sup(A) = \inf(B)$$

L'intégrale de $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ correspond à l'aire sous la courbe du graphe de f entre les bornes a et b. Il est à noter que les fonctions d'une variable continues (par morceaux) sur le segment $[a,b]$ sont intégrables au sens de Riemann.

Comme toute borne supérieure (resp. inférieure) d'un ensemble réel peut être approchée par une suite d'éléments de l'ensemble, nous déduisons que si f est intégrable, il existe une suite de fonctions étagées $(u_n)_n$ (resp. $(U_n)_n$) telles que

1. $u_n \leq f$ (resp. $U_n \geq f$) pour tout n, et
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_a^b u_n = \sup(A) = \int_a^b f(x)\,dx$ (resp. $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_a^b U_n = \inf(B) = \int_a^b f(x)\,dx$).

Nous voyons donc que l'intégrale de Riemann de la fonction f peut être obtenue comme la limite d'une suite d'intégrales de fonctions étagées. Maintenant, étudions comment la proposition 1.24 nous permet de retrouver ce résultat sur l'intégrale de Riemann lorsque f est une fonction continue par morceaux sur le segment $[a,b]$. Nous ne prouverons pas les deux résultats suivants, nous les accepteront :

1. toute fonction continue par morceaux f sur $[a,b]$ peut être approchée uniformément par une suite de fonctions étagées $(f_n)_n$ sur $[a,b]$. Autrement dit, la suite de fonctions étagées $(f_n)_n$ converge uniformément vers f ;
2. la proposition 1.24 est encore valide sous l'hypothèse où les fonctions f_n sont continues par morceaux, à condition qu'on suppose que la limite uniforme f soit aussi continue par morceaux.

Avec ces deux énoncés dont on accepte la véracité, on déduit que 1. si f est une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ (donc intégrable), il existe une suite de fonctions continues par morceaux $(f_n)_n$ qui converge uniformément vers f, et que 2. sous ces hypothèses, la proposition 1.24 (appliquée aux fonctions continues par morceaux) nous donne le résultat que l'intégrale de Riemann de la fonction continue par morceaux f est obtenue comme la limite d'une suite d'intégrales de fonctions en escaliers f_n :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$$

Remarque 1.26. La proposition 1.24 se généralise aux primitives. En effet, si pour tout n on définit $h_n(x) = \int_a^x f_n(t)dt$ la primitive de la fonction f_n qui s'annule en a, alors sous les hypothèses de la proposition, la suite de fonctions $(h_n)_n$ converge uniformément vers une fonction $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ qui est la primitive de la fonction f s'annulant en a.

Proposition 1.27. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $(f_n)_n$ une suite de fonctions $\mathcal{C}^1$ sur I. On suppose que :*

1. *la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement sur I, vers une fonction $f : I \to \mathbb{R}$;*
2. *la suite de fonctions $(f_n')_n$ converge uniformément sur (tout segment de) I, vers une fonction (nécessairement continue) $g : I \to \mathbb{R}$.*

Alors :

1. *la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur (tout segment de) I vers f, et*
2. *la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = g$, autrement dit on peut permuter limite et dérivation :*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{df_n}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right) \quad \textit{c'est à dire} \quad \lim_{n\to+\infty} f_n' = f'$$

Exemple 1.28. On peut utiliser la contraposée de la proposition pour montrer qu'une suite de fonctions ne converge par uniformément. La suite de fonctions $(f_n)_n$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ définies par $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ converge simplement vers la fonction valeur absolue $f : x \mapsto |x|$, qui n'est pas dérivable en zéro, mais dont la dérivée est bien définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \begin{cases} +1 \text{ si } x > 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Pour tout $n \geq 1$, la dérivée de la fonction f_n est donnée par $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}}$. La suite de fonctions continues $(g_n)_n$ converge simplement vers la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = \begin{cases} +1 \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Cette fonction n'est pas continue, donc par le corollaire 1.22 la convergence de la suite $(g_n)_n$ n'est pas uniforme. Donc la proposition 1.27 n'est pas applicable ici. La convergence uniforme est une condition suffisante dans cette proposition, donc si elle n'est pas satisfaite, on ne peut rien en déduire sur la conclusion, mais dans le cas présent, $f' \neq g$ car g est définie sur $\mathbb{R}$ entier tandis que f n'est définie que sur $\mathbb{R}^*$.

Nous finissons ce chapitre par quelques résultats intéressants que nous donnons à titre indicatif, pour la culture général. Les idées apparaissant dans ces théorèmes sont très profondes, et ont joué un rôle important dans le développement de l'analyse mathématique au XIXème siècle.

Théorème de Weierstrass. *Toute fonction continue sur un segment est la limite uniforme d'une suite de polynômes.*

Théorème de Féjer. *Toute fonction continue 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ est la limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques.*

1.2 Espaces vectoriels normés

L'étude des suites de fonctions et leur convergence simple/uniforme est un cas particulier de l'étude des suites de vecteurs dans les espaces vectoriels *normés*. La convergence simple et la convergence uniforme sont des convergence de suites, par rapport à deux topologies différentes. Une suite dans un ensemble E donné est une application $u : \mathbb{N} \to E$, et on la note habituellement $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. A partir de maintenant on prendra E un espace vectoriel de dimension finie (sauf si on précise autrement). Une suite d'éléments de E est donc une *suite de vecteurs*. Pour définir la convergence d'une suite dans E, il faut une notion de distance qui existe naturellement dans $\mathbb{R}$ (la valeur absolue) ou $\mathbb{C}$ (le module), et qu'on peut vouloir généraliser à tout espace vectoriel de dimension n ou infinie éventuellement. Dans la suite on travaillera sur des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels (le plus souvent de dimension finie), mais tout se généralise sans problèmes aux $\mathbb{C}$-espaces vectoriels. On notera $\mathbb{K}$ pour le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Un espace vectoriel E est un groupe abélien $(E, +)$ muni d'une multiplication externe $\cdot$ – ce qui le différencie d'un anneau dont la multiplication est interne – avec les propriétés de compatibilité entre $\cdot$ avec la loi de groupe $+$ qui ressemblent à celles d'un anneau (c'est à dire qui sont naturelles) :

— $\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\, x, y \in E,\ \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$

— $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \forall x \in E,\ (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$

— $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \forall x \in E,\ \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$

— $\forall\, x \in E,\ 1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$

Exemple 1.29. Nous avons les exemples d'espaces vectoriels suivants :

— de dimension finie : $\mathbb{R}$, $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices

— de dimension infinie dénombrable : l'anneau $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes sur $\mathbb{R}$, l'ensemble des suites réelles $(u_n)_n$ qui ont un nombre fini d'éléments non nuls

— le corps des fonction rationnelles $\mathbb{R}(X)$ c'est à dire les fractions sur les polynômes (on inclut les inverses tous les éléments de l'anneau $\mathbb{R}[X]$, comme $\mathbb{Q}$ est le corps des fractions sur l'anneau $\mathbb{Z}$), l'ensemble de toutes les suites réelles qu'on note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ ou sur n'importe quel segment $[a, b]$

La dimension d'un espace vectoriel est définie à partir du cardinal de ses bases. Une base d'un espace vectoriel E est une famille de vecteurs $\mathcal{B} = \{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de E – α est un indice qui prend valeur dans un ensemble A qui est soit fini $\{1, 2, \dots, n-1, n\}$, soit infinie dénombrable isomorphe à $\mathbb{N}$ soit infinie indénombrable isomorphe à $\mathbb{R}$ – qui est libre et génératrice. Une famille *libre* veut dire que pour toute sous-ensemble fini de cette famille – disons $\{e_{\alpha_1}, e_{\alpha_2}, \dots, e_{\alpha_n}\} \subset \mathcal{B}$ – on a la condition suivante :

$$\forall\, \lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^n \in \mathbb{K} \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda^i e_i = 0_E \implies \lambda^i = 0 \text{ pour tout } 1 \le i \le n$$

Une famille *génératrice* veut dire que pour tout vecteur $x \in E$ de l'espace vectoriel, on peut choisir une famille finie de vecteurs $\{e_{\alpha_1}, e_{\alpha_2}, \dots, e_{\alpha_m}\} \subset \mathcal{B}$ pour un entier $m \in \mathbb{N}$, et de scalaires $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^m$ tels que $x = \sum_{i=1}^{m} \lambda^i e_i$. Par la première propriété, cette décomposition est unique. Si l'ensemble $\mathcal{B}$ ayant ces propriétés est fini on dit que la dimension de l'espace vectoriel est finie, sinon, elle est infinie (dénombrable ou indénombrable, selon le cardinal de A). On parle souvent de *base de Hamel* ou *base algébrique* dans le cas infini.

Convention 1.30. ATTENTION la notation λ^i ne veut PAS dire que $\lambda \in \mathbb{K}$ est à la puissance i. λ^i est un nombre scalaire (réel ou complexe). C'est la notation d'Einstein. L'index en bas dénote les vecteurs de l'espace vectoriel, l'index en haut (puissance) dénote un nombre scalaire. Einstein a utilisé cette notation pour pouvoir supprimer les symboles somme σ de ses équations. Le convention d'Einstein c'est que s'il y a un indice en haut identique à un indice en bas, alors il y a une somme sur ces indices. Par exemple $\sum_{i=1}^n \lambda^i e_i$ s'écrit chez Einstein $\lambda^i e_i$. Par anticipation des applications des cours, on adopte dès maintenant la notation d'Einstein : les vecteurs de base de E on un indice en bas, les scalaires (coefficients) on un indice en haut.

Proposition 1.31. *Les bases d'un espace vectoriel E ne sont pas uniques mais toutes les bases de E ont le même cardinal (fini, infini dénombrable ou infini indénombrable).*

Définition 1.32. *La* dimension *d'un espace vectoriel E est le cardinal de n'importe laquelle de ses bases.*

Exemple 1.33. Nous avons les exemples d'espaces vectoriels suivants :

— base de $\mathbb{R}$ = le vecteur 1 (dim = 1), une base de $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ est $\{1, i\}$ (dim = 2), une base de $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ est faite des vecteurs $(1, 0, \ldots, 0)$, $(0, 1, 0, \ldots, 0)$, ... , $(0, 0, \ldots, 0, 1)$, une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices $E_{i,j}$ avec des 0 partout excepté à la ligne i et à la colonne j où on a 1

— une base de $\mathbb{R}[X]$ est $\{1, X, X^2, X^3, \ldots, X^n, \ldots\}$ c'est à dire une famille infinie dénombrable de vecteurs de base, une base de l'ensemble des suites réelles $(u_n)_n$ qui ont un nombre fini d'éléments non nuls est l'ensemble formé des suites $e_0 = (1, 0, \ldots)$, $e_1 = (0, 1, 0, \ldots)$, ..., $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ (le 1 est au rang $n + 1$)

— pour tous les espaces de dimension infinie non dénombrable, en général la base est formée de tous les éléments générant les droites vectorielles

Exemple 1.34. Expliquons en quoi l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles est de dimension infinie indénombrable. On a une famille naturellement candidate pour une base de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$: les suites $e_0 = (1, 0, \ldots)$, $e_1 = (0, 1, 0, \ldots)$, ..., $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ (le 1 est au rang $n+1$) (il y en a un nombre infini dénombrable). Dans ce cas toute suite réelle $(u_n)_n$ peut s'écrire comme la somme infinie $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n e_n$ mais cette somme n'est *pas finie*, donc la famille de suites $\{e_0, e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots\}$ ne satisfait pas les critères d'une base de Hamel. L'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est donc de dimension finie indénombrable.

A partir de maintenant on prend $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et on considère un espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ (on dira si c'est de dimension infinie), c'est à dire que $E \simeq \mathbb{R}^n$. Il y a donc une base $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ de E. Tout élément $x \in E$ se décompose donc de façon unique sur cette base : il existe $x^1, x^2, \ldots, x^n \in \mathbb{R}$ (les exposants ne sont pas des puissances mais des indices, pour autoriser la convention de sommation d'Einstein) tels que $x = \sum_{i=1}^n x^i e_i$ – en notation d'Einstein on écrit $x^i e_i$. Pour tout $x = \sum_{i=1}^n x^i e_i \in E$, on définit la *norme 2* – ou *norme Euclidienne* – de x comme étant le nombre réel positif suivant :

$$||x||_2 = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + \ldots + (x^n)^2}$$

Les propriétés de $\|.\|_2$ sont les mêmes que celles de la valeur absolue et du module sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ respectivement. En effet le module des complexes satisfait les propriétés suivantes :

1. $\forall\, z \in \mathbb{C}, |z| \geq 0$ (positivité)
2. $\forall\, z \in \mathbb{C},\ |z| = 0 \iff z = 0$ (caractère défini),
3. $\forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ \forall\, z \in \mathbb{C},\ |\lambda z| = |\lambda| \times |z|$ (homogénéité) ;
4. $\forall\, z, z' \in \mathbb{C},\ |z + z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire).

On observe que la norme 2 a les mêmes propriétés sur l'espace vectoriel E. Ce qui nous permet de définir la notion de norme ;

Définition 1.35. *Soit E un espace vectoriel (dimension finie ou infinie). On appelle* norme *sur l'espace vectoriel E toute application $N : E \to \mathbb{R}_+$ (positivité) telle que :*

1. *$\forall x \in E,\ N(x) = 0 \iff x = 0$ (caractère défini),*
2. *$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E,\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ (homogénéité) ;*
3. *$\forall x, y \in E,\ N(x+y) \leq N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire).*

On appelle espace vectoriel normé *(en abrégé* evn*) tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E muni d'une norme.*

Exemple 1.36. La valeur absolue sur $\mathbb{R}$, le module sur $\mathbb{C}$, et la norme 2 sur tout espace vectoriel de dimension finie E, sont des normes.

Exemple 1.37. Soit D une partie de $\mathbb{R}$ et soit $\mathcal{B}(D)$ l'ensemble des fonctions bornées sur D. C'est un espace vectoriel que nous pouvons équiper de la norme infinie qu'on définit comme suit :

$$||f||_\infty = \sup_{x \in D} |f(x)|$$

En effet, si une fonction f n'est pas bornée, la borne supérieure n'est pas définie (n'existe pas) donc la norme infinie de f (non bornée) n'existe pas. La norme infinie $\|.\|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{B}(D)$ au sens ci dessus.

Exemple 1.38. Soit $\mathcal{C}^0([a,b])$ l'ensemble des fonctions continues sur $[a,b]$ (donc en particulier bornées). En plus de la norme infinie, la famille d'applications suivantes sont des normes, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$||f||_p = \sqrt[p]{\int_a^b |f(t)|^p dt}$$

qu'on appelle *norme p* sur l'espace des fonctions. L'inégalité triangulaire correspond à ce qu'on appelle l'inégalité de Minkowski.

Remarque 1.39. Notons que la norme 1 n'est pas une norme sur l'espace $\mathcal{B}\big([0,1]\big)$ des fonctions bornées sur $[0,1]$. Cela vient du fait que la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } 0 \leq x < 1 \\ 1 \text{ si } x = 1 \end{cases}$$

satisfait $||f||_1 = 0$ mais n'est pas la fonction nulle. L'application norme 1 $\|.\|_1 : \mathcal{B}\big([0,1]\big) \to \mathbb{R}_+$ satisfait le caractère défini sur le sous-ensebme $\mathcal{C}^0([a,b])$ mais pas sur $\mathcal{B}\big([0,1]\big)$ entier. Ce dernier est donc un espace vectoriel normé pour la norme infinie, mais pas pour la norme 1.

Exemple 1.40. On peut équiper l'espace des polynômes à coefficients réels $\mathbb{R}[X]$ d'une "norme infinie", c'est à dire que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ s'écrivant $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$, on a $||P||_\infty = \max(a_0, a_1, \ldots, a_n)$. Il existe aussi une norme 1 définie comme la somme des valeurs absolues des coefficients, c'est à dire $||P||_1 = \sum_{i=0}^n |a_i|$.

Comme pour les fonctions, il existe d'autres normes sur $E \simeq \mathbb{R}^n$, pour tout $p \geq 1$:

$$||x||_p = \sqrt[p]{|x^1|^p + |x^2|^p + \ldots + |x^n|^p}$$

On les appelle *normes p* ou normes de Hölder. Ce qui donne en particulier $||x||_1 = \sum_{i=1}^n |x^i|$, qu'on appelle distance de Manhattan. On a en outre la norme infinie – ou distance de Tchebychev – sur E définie par :

$$||x||_\infty = \max\{|x^1|, |x^2|, \ldots, |x^n|\}$$

Nous montrerons en exercice que si $x \in \mathbb{R}^n$, alors la suite $\big(||x||_p\big)_p$ est une suite positive décroissante – donc minorée donc convergente – et que $\lim\limits_{p \to \infty} ||x||_p = ||x||_\infty$. La notation est donc bien trouvée ! Il existe d'autres normes sur $\mathbb{R}^n$ mais elles sont moins utilisées.

La distance de x à l'origine dépend de la norme choisie ! Par exemple on peut voir que :

$$||x||_\infty = \max\{|x^1|, |x^2|, \ldots, |x^n|\} \leq |x^1| + |x^2| + \ldots + |x^n| = ||x||_1$$

En particulier la notion de sphère unité n'a de sens que par rapport à une norme donnée. La sphère unité dans $\mathbb{R}^n$ par rapport à la norme $p \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ est définie par :

$$S_{\|\cdot\|_p}(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } ||x||_p = 1\}$$

Voici plusieurs exemples de sphères unité dans $\mathbb{R}^3$, selon les trois normes les plus utilisées :

$$S_{\|\cdot\|_\infty}(0,1) = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \max(|x|,|y|,|z|) = 1\Big\} \quad \text{cube centré en zéro}$$
$$S_{\|\cdot\|_2}(0,1) = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x^2 + y^2 + z^2 = 1\Big\} \quad \text{sphère de rayon 1 inscrite dans le cube}$$
$$S_{\|\cdot\|_1}(0,1) = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } |x| + |y| + |z| = 1\Big\} \quad \text{octaèdre régulier inscrit dans la sphère}$$

Selon la norme que l'on prend, on aura donc des sphères (donc des boules) unité différentes. Cela pose problème pour ce qu'on veut faire – définir la convergence pour les suites – car elle implique la notion de voisinage, qui elle même repose sur la notion de boule et donc de sphère. On définit les boules ouvertes et fermées de rayon R dans $\mathbb{R}^n$ à partir de l'intérieur des sphères de rayon R.

Définition 1.41. *Soit E un espace vectoriel normé (de dimension finie ou infinie), et de norme $N : E \to \mathbb{R}_+$. Soit $x \in E$ et soit $R > 0$ un nombre réel positif. On définit la* boule ouverte *de centre x et de rayon R (par rapport à la norme N) comme étant l'ensemble :*

$$B_N(x,R) = \Big\{y \in \mathbb{R}^3 \textit{ tel que } N(y-x) < R\Big\}$$

et la boule fermée *de centre x et de rayon R (par rapport à la norme N) comme étant l'ensemble :*

$$\overline{B_N}(x,R) = \Big\{y \in \mathbb{R}^3 \textit{ tel que } N(y-x) \leq R\Big\}$$

Remarque 1.42. On voit donc que la boule fermée de centre x et de rayon R contient la sphère de centre x et de rayon R, et plus précisément :

$$\overline{B_N}(x,R) = B_N(x,R) \cup S_N(x,R)$$

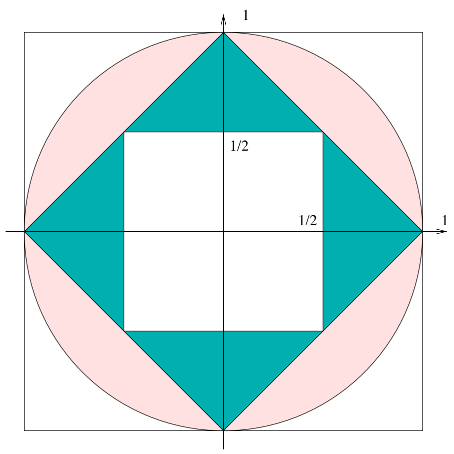


FIG. 1 – Les boules $B_\infty\left(0, \frac{1}{2}\right) \subset B_1(0,1) \subset B_2(0,1) \subset B_\infty(0,1)$ dans $\mathbb{R}^2$

Pour $E = \mathbb{R}^3$ et pour $p = 1, 2$ et $p = \infty$, en nous appuyant sur les expressions des sphères unités ci dessus, nous avons les inclusions suivantes :

$$B_{\|.\|_\infty}\left(0, \frac{1}{2}\right) \subset B_{\|.\|_1}(0,1) \subset B_{\|.\|_2}(0,1) \subset B_{\|.\|_\infty}(0,1)$$

La chaine d'inclusion est aussi valide pour les boules fermées. Nous voyons que les boules de rayon 1 associées aux normes 1 et 2 sont prises en sandwich entre deux boules associées à la norme infinie : celle de rayon $\frac{1}{2}$ (ou tout nombre strictement positif inférieur) et celle de rayon 1 (ou tout nombre strictement positif supérieur). Plus généralement dans $E \simeq \mathbb{R}^n$, on a que la boule (fermée ou ouverte) de centre 0 et de rayon R pour la norme p est incluse dans :

— la boule (fermée ou ouverte) de rayon R pour la norme q, pour n'importe quel $p \leq q$ et même $q = \infty$,

— la boule (fermée ou ouverte) de rayon nR pour la norme m, pour n'importe quel $m \leq p$.

C'est à dire, en termes mathématiques, pour tout couple d'entiers $r \leq s$:

$$B_{\|.\|_r}(0,R) \subset B_{\|.\|_s}(0,R) \subset B_{\|.\|_r}(0,nR) \tag{1.5}$$

Autrement dit toute boule pour une norme $p \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ donnée est incluse dans une boule pour n'importe quelle autre norme $q \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, pour un rayon éventuellement différent. Ce résultat très profond est caractéristique de la dimension finie, comme nous allons le voir bientôt.

Définition 1.43. *Soit E un espace vectoriel normé (de dimension finie ou infinie) de norme $N : E \to \mathbb{R}_+$. Soit $x \in E$; on appelle* voisinage de x *par rapport à la norme N tout sous-ensemble $V \subset E$ qui contient une boule ouverte centrée en x, c'est à dire tel qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $B_N(x,\epsilon) \subset V$.*

Proposition 1.44. *Si E un espace vectoriel de dimension finie (donc $E \simeq \mathbb{R}^n$) ; soit $p, q \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ et soit $x \in E$, alors un sous-ensemble $V \subset E$ est un voisinage de x par rapport à la norme p si et seulement si c'est un voisinage de x par rapport à la norme q. Autrement dit, en dimension finie, la notion de voisinage est indépendante de la norme $p \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ choisie.*

Démonstration. Soit $x \in E \simeq \mathbb{R}^n$. Nous utilisons la succession d'inclusions (1.5) des boules ouvertes, que l'on récrit pour tout $s \leq r \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ avec pour centre $x \in \mathbb{R}^n$ et de rayon $\epsilon > 0$:

$$B_{\|.\|_s}(x,\epsilon) \subset B_{\|.\|_r}(x,\epsilon) \subset B_{\|.\|_s}(x,n\epsilon)$$

Soit $V \subset E$ un voisinage de x par rapport à la norme p. Il existe donc $\epsilon > 0$ tel que $B_{\|.\|_p}(0,\epsilon) \subset V$. Si $p \leq q$, d'après la série d'inclusions ci-dessus pour $r = p$ et $s = q$, il existe une boule ouverte $B_{\|.\|_q}(x,\epsilon)$ incluse dans $B_{\|.\|_p}(0,\epsilon)$ donc dans V, donc V est un voisinage de x par rapport à la norme q. Si $q \leq p$, alors pour $r = q$ et $s = p$ on a que

$$B_{\|.\|_q}\left(x, \frac{\epsilon}{n}\right) \subset B_{\|.\|_p}(x,\epsilon) \subset V$$

On a donc que V est un voisinage de x par rapport à la norme q (dans tous les cas).

Inversement, la preuve pour montrer qu'un voisinage de x par rapport à la norme q est un voisinage de x par rapport à la norme p se fait de façon similaire. □

La proposition 1.44 est un cas particulier, démontrée avec les outils qu'on connait, d'un résultat plus général et plus profond propre à la dimension finie : que la notion de voisinage ne dépend pas de la norme choisie sur l'espace. Pour expliquer ce résultat plus général – énoncé dans le Corollaire 1.53 – nous devons introduire la notion de topologie.

Définition 1.45. *Soit E un espace vectoriel normé (de dimension finie ou infinie), de norme $N : E \to \mathbb{R}_+$. Un sous-ensemble $U \subset E$ est dit* ouvert *(par rapport à la norme N) si c'est un voisinage de chacun de ses points. Autrement dit, si :*

$$\forall\, x \in U,\ \exists \epsilon > 0 \text{ tel que } B_N(x, \epsilon) \subset U$$

Un sous-ensemble $F \subset E$ est fermé *si son complémentaire $F^c = E \backslash F$ est ouvert.*

Exemple 1.46. Dans $\mathbb{R}$, les segments sont des fermés, les intervalles ouverts sont des ouverts. Dans n'importe quel espace vectoriel normé, les boules ouvertes sont ouvertes et les boules fermées sont fermées. Il existe des sous-ensembles qui ne sont ni ouverts ni fermés, par exemple dans $(\mathbb{R}, |.|)$, le sous-ensemble $\{0\} \cup]1, 2[$ est ni ouvert ni fermé.

Définition 1.47. *Soit E un espace vectoriel normé (de dimension finie ou infinie), de norme $N : E \to \mathbb{R}_+$. L'ensemble de tous les sous-ensembles ouverts de E (par rapport à la norme N) est appelé la* topologie métrique *de E par rapport à N, et noté $\mathcal{T}(E, N)$. On prend comme convention que l'ensemble vide $\emptyset$ est ouvert.*

Remarque 1.48. Comme l'ensemble vide $\emptyset$ est ouvert, son complémentaire – qui est l'espace vectoriel E complet – est un ensemble fermé. Or E est ouvert car tout point de E est le centre d'une boule de rayon 1 incluse dans E. Donc E est un ouvert fermé. L'ensemble vide est aussi fermé car c'est le complémentaire de E, un ouvert. L'espace total E et l'ensemble vide $\emptyset$ sont les deux seuls ensembles ouverts et fermés à la fois dans la topologie métrique d'un espace vectoriel normé. La topologie de E vis à vis de la norme N est un sous-ensemble de l'ensemble des partie de E, qu'on note $\mathcal{P}(E)$.

Tous ces résultats en dimension finie sur l'inclusion des boules ouvertes/fermées viennent d'une observation assez profonde qui veut que les différentes normes sur $\mathbb{R}^n$ (espace vectoriel de dimension finie donc) sont équivalentes entre elles, dans le sens suivant :

Définition 1.49. *Soit E un espace vectoriel (de dimension finie ou infinie). On dit que deux normes $N : E \to \mathbb{R}_+$ et $N' : E \to \mathbb{R}_+$ sont* équivalentes *si il existe $0 < \alpha \leq \beta$ tels que pour tout $x \in E$ on a :*

$$\alpha N(x) \leq N'(x) \leq \beta N(x)$$

Cela définit une relation d'équivalence sur l'espace des normes sur E.

Remarque 1.50. Objectivement, si on a $\alpha N(x) \leq N'(x) \leq \beta N(x)$ alors on a $\frac{1}{\beta} N'(x) \leq N(x) \leq \frac{1}{\alpha} N'(x)$ donc c'est bien une relation d'équivalence.

Proposition 1.51. Equivalence de toutes les normes en dimension finie. *Toutes les normes sur un espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes. D'autre part, en ce qui concerne les normes p dans $\mathbb{R}^n$, pour $p \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, on a les inégalités suivantes pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:*

$$||x||_\infty \leq \ldots \leq ||x||_{p+1} \leq ||x||_p \leq \ldots \leq ||x||_2 \leq ||x||_1 \leq n||x||_\infty$$

Démonstration. La preuve dans le cas général (pour n'importe quelle norme en dimension finie) est compliquée donc nous ne la faisons pas. Par contre nous allons montrer l'équivalence des normes $p \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ dans $\mathbb{R}^n$. La preuve se fait par récurrence : soit $x \in \mathbb{R}^n$; alors on voit d'après la définition que :

$$||x||_\infty \leq ||x||_1 \leq n||x||_\infty$$

donc la norme 1 et la norme ∞ sont équivalentes. Pour la norme 2 – la norme Euclidienne usuelle – nous avons le résultat direct $||x||_\infty \leq ||x||_2$ tandis que de l'autre côté :

$$\left(||x||_2\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x^i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} (x^i)^2 + \sum_{j,k=1}^{n} |x^j||x^k| = \left(||x||_1\right)^2$$

Donc $||x||_2 \leq ||x||_1 \leq n||x||_\infty$. Ceci montre que les normes 1,2 et ∞ sont toutes les trois équivalentes. En réalité on peut montrer que $||x||_2 \leq \sqrt{n}||x||_\infty$, et plus généralement, nous déduisons de l'inégalité de Hölder que :

$$||x||_\infty \leq ||x||_1 \leq n^{\frac{1}{p}}||x||_\infty$$

Ceci prouve l'équivalence des normes $p \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ dans $\mathbb{R}^n$. $\square$

Remarque 1.52. L'inégalité de Hölder nous dit que pour tout $u_1, u_2, \ldots, u_n, v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{C}$, et pour tout $p \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} |u_k v_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |u_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |v_k|^p\right)^{1-\frac{1}{p}}$$

Nous verrons que cette inégalité est encore valide quand n tend vers $+\infty$.

Corollaire 1.53. *Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. La topologie métrique de E ne dépend pas de la norme choisie, c'est à dire que pour n'importe quel choix de normes $N_1 : E \to \mathbb{R}_+$ et $N_2 : E \to \mathbb{R}_+$ sur E, on a :*

$$\mathcal{T}(E, N_1) = \mathcal{T}(E, N_2)$$

Remarque 1.54. C'est en particulier vrai pour les normes $p \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, donc les boules ouvertes par rapport à une norme p restent ouvertes par rapport à une norme $q \neq p$. C'est le sens des inclusions 1.5.

Démonstration. Nous savons par la proposition 1.51 qu'en dimension finie que toutes les normes sont équivalentes. La notion de voisinage ne dépend ainsi pas de la norme choisie (on peut toujours inclure un voisinage d'une norme dans le voisinage de n'importe quelle autre norme). On en conclut que la notion d'ouvert ne dépend pas de la norme choisie non plus. Et donc la topologie métrique ne dépend pas de la norme choisie. $\square$

En dimension finie donc, comme les normes sont toutes équivalentes, la topologie métrique ne dépend pas de la norme choisie : un ouvert par rapport à une norme reste ouvert par rapport à n'importe quelle norme. En dimension infinie dénombrable – voir Exemple 1.40 – et indénombrable – voir Exemple 1.38 – les normes ne sont pas forcément équivalentes. Et donc la topologie de l'espace ambiant dépend de la norme choisie. Cela pose problème car c'est la topologie (les voisinages) qui gouvernent la convergence des suites : deux topologies différentes selon deux normes différentes peuvent donner des suites convergentes différentes. Regardons cela plus en détail. Nous souhaitons reproduire la notion de convergence pour les suites (et plus tard les fonctions) dans les espaces vectoriels normés, en utilisant les normes en dimension finie ou infinie. Comme pour les suites réelles ou complexes, une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé E est une application $u : \mathbb{N} \to E$, qu'on note habituellement $(u_n)_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est donc un élément de E. Pour la même raison, une limite est un vecteur de E.

Définition 1.55. *Soit E un espace vectoriel normé (de dimension finie ou infinie) de norme $||.|| : E \to \mathbb{R}_+$. On dit qu'une suite $(u_n)_n$ de E converge vers une limite $\ell \in E$ si la suite à termes positifs $\left(||u_n - \ell||\right)_n$ converge vers 0, c'est à dire si :*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N,\ ||u_n - \ell|| < \epsilon$$

Remarque 1.56. Autrement dit, la suite de vecteurs $(u_n)_n$ converge vers $\ell \in E$ si $u : \mathbb{N} \to E$ envoie tout voisinage de $+\infty$ (dans $\mathbb{N}$) dans un voisinage de ℓ dans E.

Exemple 1.57. Prenons $E = \mathcal{B}([0,1])$ l'ensemble des fonctions bornées sur le segment intervalle $[0,1] \subset \mathbb{R}$, et la norme sur E est la norme infinie $\|.\|_\infty$. Un vecteur de E est une fonction bornée sur $[0,1]$. Alors la notion de convergence pour les suites donnée ci-dessus correspond à la convergence uniforme des suites de fonctions.

Exemple 1.58. Prenons $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace des matrices réelles carrées 2×2. La choix de la norme n'a pas d'importance car elles sont toutes équivalentes en dimension finie, mais prenons la norme 1 car c'est la plus simple. C'est à dire que :

$$\forall\, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \qquad ||A||_1 = |a_{11}| + |a_{12}| + |a_{21}| + |a_{22}|$$

Soit $(u_n)_n$ la suite de matrices de terme général :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \begin{pmatrix} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \end{pmatrix}$$

La suite de matrices converge vers la matrice $\ell = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & \frac{1}{e} \end{pmatrix}$ car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} ||u_n - \ell||_1 &= \left\| \begin{pmatrix} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & \frac{1}{e} \end{pmatrix} \right\|_1 \\ &= \left\| \begin{pmatrix} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e & 0 \\ 0 & \left(1-\frac{1}{n}\right)^n - \frac{1}{e} \end{pmatrix} \right\|_1 \\ &= \left| \left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e \right| + 0 + 0 + \left| \left(1-\frac{1}{n}\right)^n - \frac{1}{e} \right| \end{aligned}$$

Les deux termes convergent vers 0 quand n tend vers l'infini, donc $||u_n - \ell||_1$ tend vers 0 aussi ce qui prouve la convergence de la suite $(u_n)_n$ vers la matrice limite ℓ.

Avec cette définition, la convergence des suites de vecteurs dans les espaces vectoriels normés de dimension finie ne dépend pas de la norme choisie (voir Proposition 1.51), car toutes les normes sont équivalentes, comme le montre la proposition suivante :

Proposition 1.59. *Soit E un espace vectoriel (de dimension finie ou infinie) et soit deux normes $\|.\|$ et $\|.\|'$ sur E. Les deux normes $\|.\|$ et $\|.\|'$ sont équivalentes si et seulement si toute suite convergente pour $\|.\|$ est convergente pour $\|.\|'$ et inversement.*

Démonstration. Nous allons montrer le sens : "normes équivalentes" $\Longrightarrow$ "les suites convergentes par rapport à une norme sont convergentes par rapport à l'autre, et inversement". L'idée de la preuve vient de Eylül.

Soit $\|.\|$ et $\|.\|'$ deux normes équivalentes sur l'espace vectoriel E. Alors il existe $0 < \alpha \leq \beta$ tels que pour tout $x \in E$, $\alpha||x|| \leq ||x||' \leq \beta||x||$. Soit $(u_n)_n$ une suite de E qui converge par rapport à la norme $\|.\|$ vers une limite $\ell \in E$. D'après l'équivalence des normes, on a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, les inégalités suivantes :

$$\alpha||u_n - \ell|| \leq ||u_n - \ell||' \leq \beta||u_n - \ell||$$

Les termes de gauche et de droite tendent vers 0 quand n tend vers l'infini. Par le théorème des gendarmes (encadrements), on déduit que la suite réelle positive $\left(||u_n - \ell||'\right)_n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, donc la suite $(u_n)_n$ converge vers ℓ par rapport à la norme $\|.\|'$.

Montrons aussi que toute suite convergeant par rapport à la seconde norme, converge aussi par rapport à la première norme. Comme on a, pour tout $x \in E$, que $\alpha||x|| \leq ||x||' \leq \beta||x||$, cela est équivalent à écrire $\frac{1}{\beta}||x||' \leq ||x|| \leq \frac{1}{\alpha}||x||'$. Soit $(v_n)_n$ une suite de E qui converge par rapport à la norme $\|.\|'$ vers une limite $\ell' \in E$. D'après l'équivalence des normes, on a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, les inégalités suivantes :

$$\frac{1}{\beta}||v_n - \ell'||' \leq ||v_n - \ell'||' \leq \frac{1}{\alpha}||v_n - \ell'||'$$

Les termes de gauche et de droite tendent vers 0 quand n tend vers l'infini. Par le théorème des gendarmes (encadrements), on déduit que la suite réelle positive $\left(||v_n - \ell'||\right)_n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, donc la suite $(v_n)_n$ converge vers ℓ' par rapport à la norme $\|.\|$. □

Du fait de l'équivalence des normes en dimension finie, une suite de vecteurs est convergente quelle que soit la norme choisie. Attention, ceci n'est pas le cas en dimension infinie où toutes les normes ne sont pas équivalentes et donc certaines suites sont convergentes par rapport à certaines normes mais pas par rapport à d'autres.

Exemple 1.60. Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1])$ l'espace des fonction continues sur $[0,1]$ (donc bornées car toute fonction continue sur un segment est bornée). Il existe plusieurs normes sur cet espace, comme la norme infinie et les normes p définies dans l'exemple 1.38. Selon la norme choisie, les suites convergentes ne sont pas les mêmes, car la convergence des suites en norme 1 sur les fonctions continues ne donne pas les mémes suites convergentes qu'en norme infinie. En effet, la suite de fonctions $(f_n)_n$ de terme général $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^n$ converge en norme 1 vers la fonction constante nulle $f \equiv 0$ sur $[0,1]$, car

$$||f_n - f||_1 = ||f_n||_1 = \int_0^1 |x^n|\, dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \quad \xrightarrow[n \to +\infty]{} \quad 0$$

Cependant cette suite de fonctions ne converge pas en norme infinie vers la fonction nulle car la suite $(f_n)_n$ n'est pas uniformément convergente sur $[0,1]$ (et la limite simple de la suite $(f_n)_n$ est discontinue donc en dehors de $\mathcal{C}^0([0,1])$). Le choix de la norme sur E – lorsqu'il est de dimension infinie – a donc des conséquences majeures sur quelles suites sont convergentes ou non.

Voici une autre caractérisation utile de la convergence d'une suite dans une espace vectoriel normé de dimension finie. Soit $E \simeq \mathbb{R}^m$ un espace vectoriel de dimension finie, et soit $\{e_1, \ldots, e_m\}$ une base de E. Soit $(u_n)_n$ une suite de vecteurs de E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut décomposer chaque vecteur $u_n \in E$ sur la base, de façon à ce qu'on ait m suites de scalaires réels $\left(\lambda_n^1\right)_n, \ldots, \left(\lambda_n^m\right)_n$ telles que $u_n = \sum_{i=1}^m \lambda_n^i e_i$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 1.61. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie, c'est à dire $E \simeq \mathbb{R}^m$. Soit $(u_n)_n$ une suite de vecteurs de E et soit $\ell \in E$. La suite $(u_n)_n$ converge vers $\ell \in E$ si et seulement si chacune des suites numériques $(\lambda_n^i)_n$ (pour tout $1 \leq i \leq m$) converge (au sens des suites réelles classiques) vers ℓ^i, la i-ème composante du vecteur ℓ. C'est à dire que :*

$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell \qquad \textit{si et seulement si} \qquad \lambda_n^i \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell^i \quad \textit{pour tout } 1 \leq i \leq m.$$

Démonstration. Soit $(v_n)_n$ la suite de vecteurs de E de terme général $v_n = u_n - \ell$. On a que $(u_n)_n$ converge vers ℓ ssi $(v_n)_n$ converge vers 0 (par rapport à n'importe quelle norme). La i-ème composante de $v_n = \sum_{i=1^m} v_n^i e_i$ est $v_n^i = \lambda_n^i - \ell^i$. En dimension finie, comme toutes les normes sont équivalentes, on peut prendre la norme 1, c'est à dire que $||v_n||_1 = \sum_{i=1}^m |\lambda_n^i - \ell^i|$. Dans ce cas, le fait que $(v_n)_n$ converge vers 0 veut dire que chaque terme $|\lambda_n^i - \ell^i|$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Cela montre que la suite réelle $\left(\lambda_n^i\right)_n$ tend vers ℓ^i. Dans le sens inverse, si la i-ème composante de u_n tend vers ℓ^i cela signifie que la suite $(u_n)_n$ tend vers ℓ quand n tend vers l'infini. □

Remarque 1.62. Attention, ici comme avant, l'exposant i de ℓ^i n'est pas une puissance mais la i-ème composante du vecteur $\ell \in E$.

Exemple 1.63. Prenons $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices 2×2. Comme on est dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, donc on peut en choisir une qui nous arrange, par exemple la norme 1, c'est à dire celle définie par :

$$\forall\, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad ||A||_1 = |a_{11}| + |a_{12}| + |a_{21}| + |a_{22}|$$

Soit $a, b \in \mathbb{R}$; prenons comme suite de matrices la suite suivante :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^k$$

avec la convention que $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right)^0 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ la matrice identité de 2×2, qu'on note habituellement I_2. Donc en particulier :

$$u_0 = I_2,\ u_1 = I_2 + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},\ u_2 = I_2 + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2, \text{ etc.}$$

Il faut voir qu'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{n} \frac{b^k}{k!} \end{pmatrix}$$

Les vecteurs de base de $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sont $E_{11} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $E_{12} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $E_{21} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $E_{22} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Nous avons donc :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}\right) E_{11} + 0\, E_{12} + 0\, E_{21} + \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{b^k}{k!}\right) E_{22}$$

Or nous savons (ou pas) que $\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ tend vers e^x quand n tend vers l'infini. On obtient donc que la suite de terme général $\left|\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} - e^x\right|$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Posons $\ell = \left(\begin{smallmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^b \end{smallmatrix}\right)$. On a donc d'après la Proposition 1.61 :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad ||u_n - \ell||_1 = \left|\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} - e^a\right| + \left|\sum_{k=0}^{n} \frac{b^k}{k!} - e^b\right|$$

Les deux termes du membre de droite tendent vers 0 quand n tend vers l'infini. Donc le membre de gauche tend vers 0 aussi, c'est à dire que la suite $(u_n)_n$ tend vers ℓ. Autrement dit nous avons montré que

$$e^{\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right)} = \left(\begin{smallmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^b \end{smallmatrix}\right)$$

Les suites convergentes nous permettent de donner une deuxième caractérisation des ensembles fermés, dont le slogan est "un fermé est une partie stable par passage à la limite" :

Proposition 1.64. *Soit E un espace vectoriel normé (de dimension finie ou infinie), de norme $||.|| : E \to \mathbb{R}_+$. Soit A un sous-ensemble de E. Alors A est fermé si et seulement si pour toute suite convergente $u : \mathbb{N} \to A$ de points de A, la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ appartient à A.*

Démonstration. Supposons que A est fermé. Alors son complémentaire A^c est ouvert dans E. Soit $(u_n)_n$ une suite de points de A convergeant vers une limite $\ell \in E$. Montrons que $\ell \in A$. Par l'absurde, si jamais $\ell \notin A$, cela veut dire que la limite appartient au complémentaire A^c, qui est ouvert rappelons le. Mais alors la caractérisation des ensembles ouverts nous dit qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $B_{\|.\|}(\ell, \epsilon) \subset A^c$. Comme la suite est convergente, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $||u_n - \ell|| < \epsilon$ pour tout $n \geq N$. Autrement dit, nous avons que $u_n \in B_{\|.\|}(\ell, \epsilon)$ pour tout $n \geq N$. Mais alors tous ces vecteurs sont dans le complémentaire A^c, ce qui n'est pas possible par hypothèse sur la suite $(u_n)_n$. C'est absurde.

Réciproquement, supposons que la limite de toute suite convergente d'éléments de A appartient à A. Montrons que A est fermé, c'est à dire que le complémentaire A^c est ouvert. Par l'absurde encore. Supposons que A^c n'est pas ouvert. Alors il existe $\ell \in A^c$ tel que pour tout $\epsilon > 0$, la boule ouverte $B(\ell, \epsilon)$ n'est pas complètement incluse dans l'ensemble A^c. Autrement dit, pour tout $\epsilon > 0$, nous avons que $B(\ell, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$. En particulier, pour $n \geq 1$, il existe un élément $u_n \in B\left(\ell, \frac{1}{n}\right) \cap A$. De ce fait, la suite $(u_n)_n$ ainsi créée converge vers ℓ. Mais alors, par hypothèse, ℓ appartient à A. Ceci est une contradiction ! □

Exemple 1.65. Nous posons $A = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Alors A n'est pas fermé car le point d'accumulation 0 n'est pas dans A, mais l'ensemble $B = \{0\} \cup A$ est fermé car le complémentaire (union infinie d'intervalles ouverts) est ouvert.

Exemple 1.66. Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles carrées $n \times n$. On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *nilpotente* si $M^n = 0$. Maintenant concentrons nous sur la dimension $n = 2$. Soit donc $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles carrées 2×2, muni de la norme $\|.\|_1$ (voir Exemple 1.63). Soit N_2 le sous-ensemble des matrices nilpotentes 2×2. Attention, ce n'est pas un sous-espace vectoriel ! Soit $(M_p)_p$ une suite de matrices 2×2 nilpotentes qui converge vers une matrice M en norme 1. Alors on a que pour tout $p \geq 0$, $(M_p)^2 = 0$. Cette identité (égalité) passe à la limite donc $M^2 = 0$ aussi. Donc les limites des suites de matrices nilpotentes sont dans N_2 donc N_2 est un fermé.

Définition 1.67. *Soit E un espace vectoriel normé (de dimension finie ou infinie), et soit A un sous-ensemble quelconque de E. On définit les notions suivantes (relatives à la norme sur E) :*

— l'intérieur de A – *noté $\mathring{A}$ – est le plus grand ouvert contenu dans A ;*
— l'adhérence de A – *notée $\overline{A}$ – est le plus petit fermé contenant A ;*
— la frontière de A *est l'ensemble des points d'adhérence qui ne sont pas intérieurs :*

$$\partial A = \overline{A} \backslash \mathring{A}$$

.

Autrement dit nous avons que $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$. Nous disons que A est dense dans E *si $\overline{A} = E$.*

Exemple 1.68. Sur $\mathbb{R}$, l'intérieur de l'ensemble $[0, 1[\cup\{2\}$ est l'intervalle ouvert $\mathring{A} =]0, 1[$. L'intérieur de l'ensemble $A = \left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$ est vide car cet ensemble est discret (discontinu), son adhérence est $\overline{A} = \{0\} \cup A$. On a bien que $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$. Dans n'importe que espace vectoriel normé, l'intérieur de la boule fermée de centre x et de rayon R est la boule ouverte de centre x et de rayon R. L'adhérence de la boule ouverte de centre x et de rayon R est la boule fermée de centre x et de rayon R.

Proposition 1.69. *Soit E un espace vectoriel normé (de dimension finie ou infinie), et soit A un sous-ensemble quelconque de E. Alors*

— $\left(\mathring{A}\right)^c = \overline{A^c}$ *et* $(\mathring{A^c}) = \overline{A}$ *;*

— *A est ouvert si et seulement si $A = \mathring{A}$;*
— *A est fermé si et seulement si $A = \overline{A}$;*
— *la frontière ∂A est fermée ;*
— *A est dense dans E si et seulement si tout point de E est atteignable comme limite d'une suite de points de A.*

Démonstration. Les trois premiers points découlent de la définition. La frontière est l'intersection de deux ensembles fermés $\overline{A}$ et $\overline{A^c}$, donc c'est un fermé. Nous ne démontrerons pas le dernier point. Cela revient à montrer qu'un point x appartient à l'adhérence de A si et seulement si il existe une suite de points de A qui converge vers x. □

Remarque 1.70*.* La notion d'ouvert, de fermé, et donc d'intérieur et d'adhérence dépend de la norme choisie en dimension infinie. Mais en dimension finie comme toutes les normes sont équivalentes, ces notions sont stables même si on change de norme. La densité d'un ensemble en dimension finie est donc indépendante de la norme choisie.

Exemple 1.71*.* Nous savons les rationnels sont denses dans les réels, dans le sens où tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contient un (en fait une infinité) de rationnels. Cette définition coincide avec celle de la densité que nous venons de voir, c'est à dire que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. En effet, tout nombre réel peut être atteint comme limite d'une suite de rationnels, donc $\mathbb{R}$ est le plus petit fermé contenant $\mathbb{Q}$.

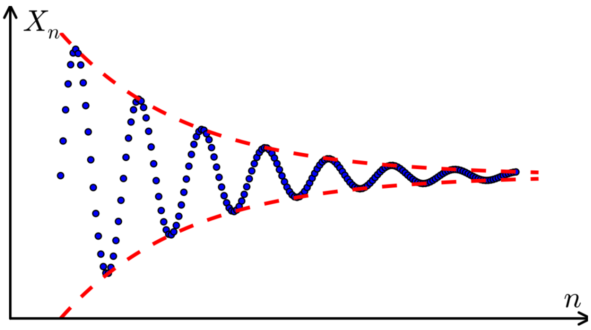
Exemple 1.72*.* Il se trouve que $GL_n(\mathbb{R})$ – l'ensemble de toutes les matrices inversibles (de déterminant non-nul) – est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Nous pouvons le voir facilement en dimension 2. L'espace $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est l'union de trois sous-ensemble (pas des espaces vectoriels) : l'ensemble $GL_{2+}(\mathbb{R})$ des matrices inversibles de déterminant positif, l'ensemble $GL_{2-}(\mathbb{R})$ des matrices inversibles de déterminant négatif, et l'ensemble $\mathcal{M}_{2,\det=0}(\mathbb{R})$ des matrices non-inversibles (de déterminant nul). Chaque ensemble $GL_{2\pm}(\mathbb{R})$ est ouvert. En effet, le déterminant d'une matrice $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ est $\det(M) = ad - bc$. Si on se déplace un peu autour de M, c'est à dire si on change un peu les coefficients a, b, c et d, alors le déterminant change continument (c'est une fonction continue sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$). Mais alors dans ce cas, si on prend M une matrice inversible de déterminant $\det(M) > 0$ strictement positif, on peut définir une petite boule de centre M et de rayon $\epsilon > 0$ assez petit, tel que toutes les matrices dans cette boules ont un déterminant strictement positif. Cela montre que $GL_{2+}(\mathbb{R})$, on fait de même avec $GL_{2-}(\mathbb{R})$. Par complémentarité de l'union $GL_{2+}(\mathbb{R}) \cup GL_{2-}(\mathbb{R})$ dans l'espace ambiant, on en déduit que $\mathcal{M}_{2,\det=0}(\mathbb{R})$ est fermé.

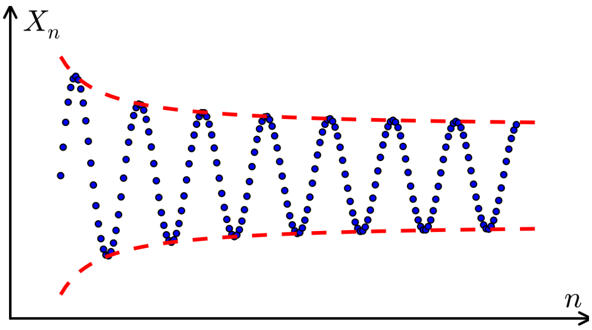
Pour la densité de $GL_n(\mathbb{R})$ on procède comme suit : soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors posons pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $A_p = A - \frac{1}{p} I_2$ où $I_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ est la matrice identité. Comme le spectre de A est fini (il contient au maximum 2 valeurs propres), on est sûr que la matrice A_p est inversible pour tous les $p \in \mathbb{N}^*$, sauf 2 au maximum (si jamais une des valeurs propres de A est $\frac{1}{n}$ par exemple pour un certain entier n non nul). On a donc une suite de matrices inversible $(A_p)_p$ qui converge vers la matrice A (vis à vis de n'importe quelle norme car nous sommes en dimension finie). Ceci montre que l'adhérence de $GL_n(\mathbb{R})$ est bien tout l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Comme avec les suites numériques, la notion de suite de Cauchy et les résultats que l'on connait déjà sont toujours valides si on adapte la définition aux espaces vectoriels :

Définition 1.73. *Soit E un espace vectoriel normé (de dimension finie ou infinie), de norme $\|.\| : E \to \mathbb{R}_+$. On dit qu'une suite de vecteurs $(u_n)_n$ est une* suite de Cauchy *si elle possède la propriété suivante :*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p, q \geq N,\ ||u_p - u_q|| < \epsilon$$





On a la propriété (toujours vraie dans un espace vectoriel normé de dimension finie ou infinie) que toute suite convergente est une suite de Cauchy (cela se montre facilement). Par contre la réciproque – si une suite est de Cauchy, alors elle est convergente – n'est vraie que dans certains espaces, dont $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$. Comme cette propriété est importante, ces espaces méritent un nom :

Définition 1.74. *Soit E un espace vectoriel normé (de dimension finie ou infinie), de norme $\|.\| : E \to \mathbb{R}_+$. On dit qu'une partie A de E est* complète *(vis à vis de la norme $\|.\|$) si toute suite de Cauchy d'éléments de A* converge dans A. *Un espace vectoriel normé complet – c'est à dire que toute suite de Cauchy de E converge – est appelé* espace de Banach.

Remarque 1.75. Attention notons bien que la complétude est une propriété relative à un choix de norme ! Stefan Banach (1892-1945) est un mathématicien polonais. Ses travaux ont surtout porté sur l'analyse fonctionnelle dont il est l'un des fondateurs, avec l'école Polonaise de mathématiques du début XXème siècle.

Exemple 1.76. $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des espaces de Banach. $\mathbb{Z}$ est une partie complète de $\mathbb{R}$ car toute suite de Cauchy entière est constante à partir d'un certain rang. Sinon, $\mathbb{Q}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui n'est pas complet, car des suites de rationnelles peuvent être convergente (donc de Cauchy) vers un irrationnel (en dehors de $\mathbb{Q}$). $\mathbb{R}$ est le plus petit complété de $\mathbb{Q}$: on lui a juste rajouté les limites des suites de Cauchy.

Exemple 1.77. Une partie non complète de l'espace vectoriel $\mathbb{R}$ est $A =]0,1]$ car la suite réelle de terme général $u_n = \frac{1}{n}$ est de Cauchy, mais elle ne converge pas dans $]0,1]$, car elle converge vers 0 qui se trouve à l'extérieur. Par contre nous voyons que $\overline{A} = [0,1]$ est complet. Etre fermé et être complet a donc un lien fort.

Proposition 1.78. *Soit E un espace vectoriel normé, de norme $\|.\| : E \to \mathbb{R}$. Toute partie de E qui est complète (vis à vis de la norme $\|.\|$) est fermée (vis à vis de la norme $\|.\|$), et tout sous-ensemble fermé d'une partie complète est complet. De ce fait, dans un espace de Banach, un sous-ensemble est complet si et seulement si il est fermé.*

Démonstration. Soit A une partie complète de E, c'est à dire un sous-ensemble pour lequel toute suite de Cauchy d'éléments de A converge dans A. Prenons une suite convergente d'éléments de A, alors c'est une suite de Cauchy, donc elle converge dans A par complétude. Donc par la Proposition 1.64, A est fermé.

Maintenant, soit $B \subset A$ une sous-ensemble fermé de A. Prenons une suite de Cauchy d'éléments de B. Comme $B \subset A$, et que A est complet, alors la suite de Cauchy choisie converge dans A (au moins). Mais comme B est fermé, la limite de cette suite est nécessairement dans B, par Proposition 1.64. Donc la suite de Cauchy converge dans B donc B est complet. □

Proposition 1.79. *Tout espace vectoriel normé de dimension finie est de Banach (c'est à dire complet), vis à vis de n'importe quelle norme.*

Démonstration. L'idée c'est de se ramener à travailler avec des suites de Cauchy réelles, dont on sait qu'elles convergent. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, disons $m \in \mathbb{N}^*$. Comme toutes les normes sont équivalentes en dimension finie, choisissons d'utiliser la norme 1. Prenons une suite de Cauchy $(u_n)_n$ et montrons qu'elle est convergente dans E. Ecrivons ce que cela veut dire être de Cauchy dans ce contexte :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p, q \geq N,\ \|u_p - u_q\|_1 < \epsilon$$

On peut décomposer chaque terme u_n en composantes sur une base $(e_1, \dots, e_m)$ de E, c'est à dire $u_n = \sum_{k=1}^m \lambda_n^k e_k$, de façon à ce qu'on ait m suites réelles $(\lambda_n^1)_n, \dots, \lambda_n^m)_n$. On peut récrire la condition de Cauchy vis à vis de la norme 1 comme :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p, q \geq N,\ |\lambda_p^1 - \lambda_q^1| + |\lambda_p^2 - \lambda_q^2| + \ldots + |\lambda_p^m - \lambda_q^m| < \epsilon$$

Cela veut dire que individuellement, chaque suite réelle $(\lambda_n^k)_n$ est une suite de Cauchy. Mais dans $\mathbb{R}$, toute suite de Cauchy est convergente ! Donc les m suites réelles $(\lambda_n^1)_n, \dots, \lambda_n^m)_n$ sont convergentes. On en déduit par la Proposition 1.61, que la suite $(u_n)_n$ est convergente. □

Proposition 1.80. *L'espace des polynômes à coefficients réels $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme infinie n'est pas un espace de Banach.*

Remarque 1.81. La norme infinie sur $\mathbb{R}[X]$ est définie comme suit : pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ s'écrivant $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, on pose $||P||_\infty = \max(|a_0|, |a_1|, \dots, |a_n|)$.

Démonstration. Pour montrer que $\mathbb{R}[X]$ n'est pas complet, il suffit d'un exemple de suite de Cauchy qui ne converge pas dans $\mathbb{R}[X]$. Définissons une suite de polynômes de terme général $P_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} X^k$ donc en particulier $a_0 = 0$ pour tout polynôme P_n. Alors pour tout $1 \leq p < q$, on a :

$$||P_q - P_p||_\infty = \Big|\Big| \sum_{k=p+1}^{q} \frac{1}{k} X^k \Big|\Big|_\infty = \max\left(\frac{1}{p+1}, \dots, \frac{1}{q}\right) \leq \frac{1}{p+1} \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$$

Montrons que la suite $(P_n)_n$ satisfait le critère des suites de Cauchy. Soit $\epsilon > 0$, et on pose $N = E\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$. Comme la partie entière est telle que $x < E(x) + 1$, on a, pour $x = \frac{1}{\epsilon}$:

$$\frac{1}{\epsilon} < E\left(\frac{1}{\epsilon}\right) + 1 \quad \text{ce qui donne} \quad \frac{1}{E\left(\frac{1}{\epsilon}\right) + 1} < \epsilon \quad \text{donc} \quad \frac{1}{N+1} < \epsilon$$

Alors, pour tout $N \leq p < q$, nous avons :

$$||P_q - P_p||_\infty \leq \frac{1}{p+1} \leq \frac{1}{N+1} < \epsilon$$

Même raisonnement pour tout $N \leq q < p$. Cela nous dit que la suite $(P_n)_n$ satisfait la condition de Cauchy :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p, q \geq N,\ ||P_p - P_q||_\infty < \epsilon$$

La suite $(P_n)_n$ est donc une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}[X]$. Supposons que cette suite converge vers un polynôme qui s'écrit $P = \sum_{k=0}^N a_k X^k$ pour un certain $N \in \mathbb{N}$ et certains coefficients fixés $a_1, a_2, \dots, a_N \in \mathbb{R}$, et montrons une contradiction. Si la suite converge vers P alors la suite réelle $\left(||P_n - P||_\infty\right)_n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Alors on a pour tout $n \geq N$:

$$P_n - P = \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{1}{k} - a_k\right) X^k + \sum_{k=N+1}^{n} \frac{1}{k} X^k$$

Mais dans ce cas, pour tout $n \geq N$:

$$||P_n - P||_\infty = \max\left(\left|\frac{1}{1} - a_1\right|, \dots, \left|\frac{1}{N} - a_N\right|, \frac{1}{N+1}, \dots, \frac{1}{n}\right) \geq \frac{1}{N+1}$$

En particulier le membre de droite st nécessairement supérieur ou égal à $\frac{1}{N+1}$. Nous voyons donc que $||P_n - P||_\infty \geq \frac{1}{N+1}$ donc la suite réelle $\big(||P_n - P||_\infty\big)_n$ est minorée par un nombre réel strictement positif donc ne peut pas converger vers 0, ce qui est une contradiction. L'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}[X], \|.\|_\infty)$ n'est donc pas complet. □

Exemple 1.82. Un autre espace non-complet est le suivant : on prend l'ensemble des polynômes à coefficients complexes, noté $\mathbb{C}[X]$, avec comme norme l'application $N : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{R}_+$ définie par :

$$\forall\, P \in \mathbb{C}[X] \qquad N(P) = \sup_{|z|=1} |P(z)|$$

Alors $(\mathbb{C}[X], N)$ n'est pas complet.

Proposition 1.83. *Soit D une partie non-vide de $\mathbb{R}$, alors l'espace vectoriel $\mathcal{B}(D)$ des fonctions bornées sur D muni de la* norme infinie *est un espace de Banach.*

Démonstration. L'idée de la preuve est la même que celle de la proposition 1.79, mais avec une infinité de suites de Cauchy, chacune d'entre elles correspondant à un point x de D. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions bornées sur $D \subset \mathbb{R}$, qui satisfait le critère de Cauchy vis à vis de la norme infinie. Montrons qu'elle est convergente. Nous devons d'abord définir sa limite $f : D \to \mathbb{R}$, puis montrer qu'elle converge vers cette limite avec la norme infinie, c'est à dire qu'elle converge uniformément vers f.

Soit $\epsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, q \geq N$, nous avons $||f_q - f_p||_\infty < \epsilon$. Cela veut dire que :

$$\sup_{x \in D} \big|f_q(x) - f_p(x)\big| < \epsilon$$

En particulier, fixons $x \in D$, nous avons donc que pour tout $p, q \geq N$, $\big|f_q(x) - f_p(x)\big| < \epsilon$. La suite réelle $\big(f_n(x)\big)_n$ est donc une suite de Cauchy (dans $\mathbb{R}$!). Elle converge donc vers une limite que l'on dénote $f(x)$. On répète le raisonnement pour tout x dans D. A la fin, on a donc, pour tout x dans D, une règle qui assigne au point x un nombre réel $f(x)$. Cela définit une fonction $f : D \to \mathbb{R}$, telle que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction f.

Montrons que la suite converge uniformément, c'est à dire que la suite $(f_n)_n$ converge vers f dans $\mathcal{B}(D)$ vis à vis de la norme infinie. Tout d'abord il faut pour cela d'abord montrer que f est bien bornée. Nous ne le montrerons pas mais cela s'appuie encore sur le critère de Cauchy. On admet donc que $f \in \mathcal{B}(D)$. Montrons que $(f_n)_n$ converge uniformément. Soit $\epsilon > 0$, comme la suite est de Cauchy, il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, q \geq N$, $||f_q - f_p||_\infty < \epsilon$. Cela signifie que pour tout $x \in D$, $\big|f_q(x) - f_p(x)\big| < \epsilon$. Faisons tendre p vers l'infini, la suite réelle $\big(f_p(x)\big)_p$ tend vers $f(x)$. Nous obtenons donc que pour tout $q \geq N$ et tout $x \in D$, nous avons $\big|f_q(x) - f(x)\big| < \epsilon$, autrement dit, pour tout $q \geq N$, $||f_q - f||_\infty < \epsilon$. C'est la définition de la convergence uniforme. □

Exemple 1.84. Un autre exemple d'espace de Banach qui s'appuie sur une preuve similaire est l'espace des suites réelles ou complexes bornées $(u_n)_n$, muni de la norme infinie définie par

$$||u_n||_\infty = \sup_{n \geq 0} |u_n|$$

Corollaire 1.85. *Soit $a < b$ deux réels, alors l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0\big([a, b]\big)$ des fonctions continues sur $[a, b]$ muni de la* norme infinie *est un espace de Banach.*

Démonstration. Si D est un segment $[a,b]$, alors $\mathcal{C}^0([a,b])$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}([a,b])$ car toutes les fonctions continues sur un segment sont bornées. Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy de fonctions continues sur $[a,b]$. Comme $\mathcal{C}^0([a,b]) \subset \mathcal{B}([a,b])$ et que ce dernier est complet, la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge dans $\mathcal{B}([a,b])$ (par rapport à la norme infinie) vers une fonction bornée f. Comme la limite d'une suite de fonctions continues qui converge uniformément est elle aussi continue (voir Théorème 1.20), on en déduit que la fonction limite f vit bien dans $\mathcal{C}^0([a,b])$. L'espace vectoriel de dimension infinie $\mathcal{C}^0([a,b])$ est donc complet avec la norme infinie. $\square$

Remarque 1.86. Attention ce n'est plus forcément le cas que $\mathcal{C}^0([a,b])$ est complet avec d'autres normes car en dimension infinie, toutes les normes ne sont pas équivalentes ! Par exemple :

Exemple 1.87. L'espace vectoriel de dimension infinie $\mathcal{C}^0([a,b])$ n'est pas complet avec la norme 1.

En effet si on définit la suite de fonctions $(f_n)_n$ suivante :
pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$\begin{aligned} f_n :\ [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 1 - n\left(x - \frac{1}{2}\right) \text{ si } x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right] \\ 0 \text{ si } x \in \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1\right] \end{cases} \end{aligned}$$

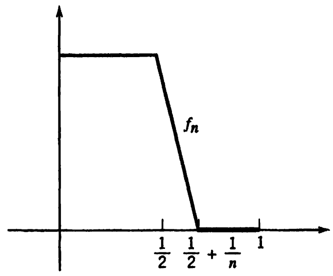


Figure 11.4.1 The sequence (f_n)

Pour tout $p \leq q \in \mathbb{N}^*$ nous avons que $f_p \geq f_q$ (il faut dessiner les fonctions pour voir comment l'intégrale se comporte). On a donc :

$$\|f_p - f_q\|_1 = \int_0^1 |f_p - f_q| = \int_0^1 f_p - f_q = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}} f_p - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{q}} f_q = \frac{1}{2p} - \frac{1}{2q} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$$

Comme la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ converge (vers 0), c'est une suite de Cauchy, donc le membre de droite ci-dessus peut devenir aussi petit que l'on veut, donc le membre de gauche aussi. On en déduit que la suite de fonctions $(f_n)_n$ est une suite de Cauchy. Par contre elle ne converge pas dans $\mathcal{C}^0([a,b])$ car la limite simple de la fonction est la fonction

$$\begin{aligned} f :\ [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 0 \text{ si } x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} \end{aligned}$$

qui est discontinue, donc en dehors de $\mathcal{C}^0([a,b])$.

Exemple 1.88. Un autre exemple d'espace vectoriel non complet avec une norme mais complet avec une autre est le suivant $E = \mathcal{C}^1([a,b])$, pour un choix de réels $a < b$ fixés. Avec la norme infinie, l'espace n'est pas complet car une suite de fonctions $\mathcal{C}^1$ peut converger uniformément vers une fonction f, mais celle-ci n'est pas forcément $\mathcal{C}^1$. En effet, il faut des hypothèses supplémentaires, voir Théorème 1.27. Par contre, avec la norme suivante :

$$\forall f \in E, \quad ||f|| = ||f||_\infty + ||f'||_\infty,$$

l'espace $E = \mathcal{C}^1([a,b])$ est un espace complet (dit de Banach donc).

Les exemples précédents nous montrent plusieurs cas assez inattendus. En dimension finie, tous les espaces vectoriels normés sont complets. En dimension infinie indénombrable, ça dépend de la norme. Nous verrons dans le chapitre suivant comment caractériser les espaces complets. Pour l'instant, nous avons juste le joli résultat suivant que nous ne prouverons pas :

Proposition 1.89. *Tout espace de Banach est de dimension finie ou infinie non-dénombrable.*

Corollaire 1.90. *Tout espace de dimension infinie dénombrable n'est jamais complet, quelle que soit la norme.*

2 Séries de vecteurs, séries numériques et séries de fonctions

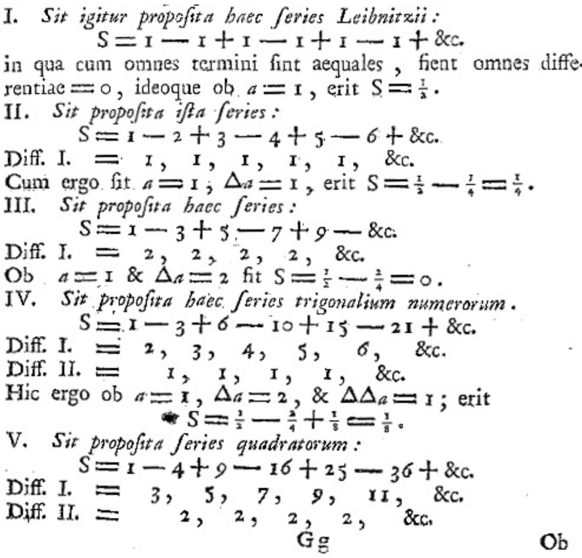
Assez tôt dans l'histoire des mathématiques on a observé que la somme des termes d'une suite pouvait converger. Par exemple, on savait au début du XVIIIème siècle que la somme des $\frac{1}{n}$ divergeait mais que la somme des $\frac{1}{n}^2$:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\dots$$

convergeait, c'est à dire que l'on savait que la somme était majorée.

Malheureusement, c'était plus compliqué pour trouver la limite car la somme converge lentement. Le problème de trouver la limite de cette somme a été posée en premier en 1644 par Pietro Mengoli puis étudiée par Jacques Bernoulli à Bâle – d'où le surnom du problème – et enfin étudiée par Stirling dans les années 1730 puis démontrée par Euler en 1735 et plus rigoureusement encore en 1744, et on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$



I. *Sit igitur proposita haec series Leibnitzii:*
$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \&c.$
in qua cum omnes termini sint aequales, fient omnes differentiae $= 0$, ideoque ob $a = 1$, erit $S = \frac{1}{2}$.
II. *Sit proposita ista series:*
$S = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \&c.$
Diff. I. $= 1, 1, 1, 1, 1,$ &c.
Cum ergo sit $a = 1$; $\Delta a = 1$, erit $S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.
III. *Sit proposita haec series:*
$S = 1 - 3 + 5 - 7 + 9 - \&c.$
Diff. I. $= 2, 2, 2, 2,$ &c.
Ob $a = 1$ & $\Delta a = 2$ fit $S = \frac{1}{2} - \frac{2}{4} = 0$.
IV. *Sit proposita haec series trigonalium numerorum.*
$S = 1 - 3 + 6 - 10 + 15 - 21 + \&c.$
Diff. I. $= 2, 3, 4, 5, 6,$ &c.
Diff. II. $= 1, 1, 1, 1,$ &c.
Hic ergo ob $a = 1$, $\Delta a = 2$, & $\Delta\Delta a = 1$; erit
$S = \frac{1}{2} - \frac{2}{4} + \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$.
V. *Sit proposita series quadratorum:*
$S = 1 - 4 + 9 - 16 + 25 - 36 + \&c.$
Diff. I. $= 3, 5, 7, 9, 11,$ &c.
Diff. II. $= 2, 2, 2, 2,$ &c.
Gg Ob

A droite, document d'Euler attribuant diverses valeurs à des séries divergentes par méthode de différences finies.

La compréhension des sommes des termes d'une suite numérique, qu'on appelle "séries numériques", s'est faite du XVIIème au XIXème siècle. Par la suite, très naturellement, dès le XIXème siècle les mathématicien · nes en sont venues à sommer des fonctions. Cela permet de définir des fonctions aux propriétés étranges (par exemple continue mais nulle part dérivable), mais aussi d'approximer une fonction quelconque par des polynômes (son développement de Taylor), qui généralisent les développement limité à tout ordre. Nous voulons aussi faire sens de l'expression suivante, très utilisée en science :

$$\exp(f)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^n}{n!}$$

où $f : E \to E$ est une fonction continue (il faut donc définir ce que cela veut dire) d'un espace E dans lui même (en particulier, on peut prendre une matrice). Comme les suites vectorielles nous pouvons sommer un nombre fini de fois des vecteurs dans un espace vectoriel normé. La somme peut converger ou non. Comprendre cela va nous occuper le reste du semestre. Pour bien comprendre comment les sommes de vecteurs (et de fonctions donc) convergent, on va commencer avec les sommes de suites réelles, c'est à dire les séries numériques. Comme les séries numériques à terme positif vont resurgir dans le cas général on va commencer par cela.

2.1 Généralités sur les séries

Définition 2.1. *Soit (E, N) un espace vectoriel normé et $u : \mathbb{N} \to E$ une suite de vecteurs de E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons :*

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}u_k$$

On l'appelle la somme partielle de rang n *de la suite* $(u_n)_n$ *; c'est un vecteur de* E*. La suite de sommes partielles* $(S_n)_n$ *est une application de* $\mathbb{N}$ *dans* E*, qui s'appelle la* série *de terme général* u_n*, notée habituellement* $\sum u_n$*.*

On dit que la série $\sum u_n$ *est convergente si la suite* $(S_n)_n$ *est convergente dans* E *par rapport à la norme* N *choisie. Dans ce cas, on définit la notation suivante :*

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n \to +\infty} S_n \ \in E$$

C'est un vecteur de E *qu'on appelle la* somme *de la série des* u_n*.*

Remarque 2.2. ATTENTION la notation $\sum u_n$ est un symbole pour désigner la suite de sommes partielles $(S_n)_n$. Cette suite est donc appelée "série des u_n" et est notée $\sum u_n$, mais ne doit PAS être confondu avec la notation $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$, qui symbolise la limite de la suite des sommes partielles $(S_n)_n$, et qu'on peut penser comme la somme totale. Autrement dit :

$$\sum u_n \text{ est la suite } (S_n)_n \text{ (existe toujours) } \neq \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \text{ n'existe que quand } (S_n)_n \text{ converge, c'est un vecteur de } E$$

Faites attention aux notations, vous allez faire des erreurs longtemps.

Exemple 2.3. L'exemple fondamental est celui de la série géométrique. Soit $E = \mathbb{R}$ le corps des réels et soit $q \in \mathbb{R}$. On connait la suite géométrique de terme général q^n. On sait qu'elle est convergente si et seulement si $|q| < 1$ ou $q = 1$, et elle est divergente si $|q| > 1$ ou $q = -1$. Si $q = 1$ alors la somme partielle de rang n de la suite $(q^n)_n$ vaut $S_n = \sum_{k=0}^{n} = \underbrace{1^0 + 1^1 + 1^2 + \ldots + 1^n}_{n+1 \text{ fois}} = n + 1$. La suite des sommes partielles tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. La série $\sum q^n$ est dans ce cas divergente. Maintenant supposons que $q \neq 1$. Dans ce cas la somme partielle de rang n vaut :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = q^0 + q^1 + q^2 + q^3 + q^4 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

1. Si $|q| < 1$, on a que la suite $(q^n)_n$ converge vers 0. Dans ce cas, la suite des sommes partielles converge vers $\frac{1}{1-q}$. Ce qui veut dire que la série géométrique $\sum q^n$ converge et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{1}{1 - q}$$

2. Si par contre $|q| > 1$, la suite géométrique des valeurs absolue $\big(|q|^n\big)_n$ tend vers $+\infty$. Dans ce cas la suite des somme partielles satisfait :

$$|S_n| \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{|q|^{n+1}}{|1 - q|} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

   Ainsi dans le cas $|q| > 1$ la série $\sum q^n$ diverge.
3. Si finalement $q = -1$, on observe que $S_0 = (-1)^0 = 1$, $S_1 = S_0 + (-1)^1 = 1 - 1 = 0$, $S_2 = S_1 + (-1)^2 = 1$, $S_3 = S_2 + (-1)^3 = 1 - 1 = 0$, etc. On obtient que $S_{2p} = 1$ et $S_{2p+1} = 0$. Ainsi la série $\sum q^n$ diverge aussi (ne converge pas).

La nature d'une série – convergente ou divergente – ne dépend pas de ses premiers termes. En effet, si deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont identiques à partir du rang $N \in \mathbb{N}$, alors pour tout $n \geq N$, $S_n - S_N = S'_n - S'_N$, où S_n est la somme partielle de la suite u et S'_n est la somme partielle de la suite v. Les termes de rang inférieurs à N n'interviennent pas pour savoir si les séries convergent ou non. Par contre, bien entendu, si les deux séries sont convergentes, alors on n'a pas $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ si les premiers termes sont différents.

Définition 2.4. *Soit (E, N) un espace vectoriel normé et soit $(u_n)_n$ une suite de vecteurs de E. Supposons que la série $\sum u_n$ est convergente, de limite $S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$. Pour tout $n \geq 0$, définissons :*

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

C'est un vecteur de E qu'on appelle le reste de de la série *$\sum u_n$ de rang n.*

Remarque 2.5. En théorie, cela n'a pas de sens d'écrire $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ car $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ est juste une notation abstraite pour désigner la limite de la suite des sommes partielles. Mais il se trouve que cette notation est très pertinente et très pratique, car on peut l'utiliser pour symboliser comment écrire le reste d'une série convergente :

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

Exemple 2.6. Retour sur la série géométrique, pour $|q| < 1$ on sait que la série converge donc le reste est définissable et on a :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} q^k = S - S_n = \frac{1}{1-q} - \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{q^{n+1}}{1-q}$$

Le reste de rang n est la différence entre la somme partielle de rang n et la limite de la suite des sommes partielles. On peut le voir comme l'erreur commise en prenant S_n comme valeur approchée de la limite S. Comme la suite $(S_n)_n$ tend vers sa limite S, nous déduisons que la suite des reste $(R_n)_n$ tend vers 0. Par convention, on pose parfois $S_{-1} = 0$, et d'autre part $R_{-1} = S - S_{-1} = S$. Dans l'exemple de la série géométrique on voit bien que $R_{-1} = S = \frac{1}{1-q}$ et que la suite $(R_n)_n$ converge vers 0. Faits simples mais importants :

- On peut récupérer la suite à partir de la série, puisqu'on a $u_n = S_n - S_{n-1}$ (avec la convention $S_{-1} = 0$).
- Si la série converge, alors on peut récupérer la suite à partir de la suite des restes puisque $u_n = R_{n-1} - R_n$, avec la convention que $R_{-1} = S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.
- La convergence d'une suite peut toujours se traduire par celle d'une série : la série télescopique. Soit $(u_n)_n$ une suite, alors on a que $u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k - u_{k-1}$ avec la convention que $u_{-1} = 0$. Donc la suite $(u_n)_n$ converge si et seulement si la série $\sum u_{n+1} - u_n$ converge.

Proposition 2.7. *Soit $(u_n)_n$ une suite de vecteurs de E, espace vectoriel normé. Si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite $(u_n)_n$ converge vers 0 (le vecteur nul).*

Démonstration. Si la série $\sum u_n$ converge, cela veut dire que la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ converge, vers une limite donnée S (vecteur de E). Or nous avons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = S_n - S_{n-1}$. Le membre de droite tend vers 0 car à la limite il vaut $S - S$. Le membre de gauche tend donc vers l'origine. □

Cette proposition est extrêmement importante car elle nous donne une condition nécessaire à la convergence, et que sa contraposée nous donne une condition suffisante pour la non-convergence d'une série. Rappelons que si $P \Longrightarrow Q$ alors la contraposée de cette phrase logique est $non - Q \Longrightarrow non - P$. La contraposée est équivalente à la phrase logique $P \Longrightarrow Q$.

Proposition 2.8. Contraposée de la Proposition 2.7. *Soit $(u_n)_n$ une suite de vecteurs de E, espace vectoriel normé. Si la suite $(u_n)_n$ ne converge pas vers 0 (le vecteur nul), alors la série est divergente.*

Définition 2.9. *Soit $(u_n)_n$ une suite de vecteurs de E, espace vectoriel normé. On dit que la série est* grossièrement *– ou* essentiellement *– divergente si la suite $(u_n)_n$ ne converge pas vers 0 (le vecteur nul).*

On a trois donc cas principaux de suite grossièrement divergentes dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$:

— toute suite qui tend vers $+\infty$, par exemple $u_n = n^2$;

— toute suite qui converge vers une limite non-nulle, comme $u_n = 1 + \frac{1}{n}$;

— toute suite périodique, comme $u_n = e^{i\frac{n\pi}{3}}$;

— toute suite dense dans un compact, comme $u_n = \cos(n)$.

Attention, la Proposition 2.7 n'est pas une équivalence. Nous rappelons que $P \Longrightarrow Q$ ne nous donne une information sur Q, que si P est vraie. Si P est fausse, Q peut être soit vraie soit fausse, sans contrainte. En particulier, il est possible d'avoir Q vraie (la suite $(u_n)_n$ tend vers 0), et P fausse (la série $\sum u_n$ diverge), comme l'exemple suivant le montre.

Proposition 2.10. *La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ est divergente.*

Démonstration. La divergence a été prouvée pour la première fois le mathématicien français Nicolas Oresme au XIVème siècle. Par l'absurde : supposons que la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ converge. Dans ce cas ce serait une suite de Cauchy. Or nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \underbrace{\frac{1}{k}}_{} \geq \frac{1}{2n} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

Donc la condition de Cauchy ne peut pas être satisfaite, ce qui est une contradiction. □

Démonstration. Deuxième preuve ! On raisonne encore une fois par l'absurde. Tout d'abord observons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n(2n-1)}$$

On peut réarranger la somme partielle S_{2n} en paquets de deux fractions, dans lesquels on utilise la relation ci-dessus :

$$\begin{aligned}
S_{2n} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} \\
&= \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \dots + \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right) \\
&= \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{12}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{30}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{56}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n(2n-1)}\right) \\
&= S_n + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \frac{1}{56} + \dots + \frac{1}{2n(2n-1)}\right) = S_n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k(2k-1)}
\end{aligned}$$

Si la série harmonique converge, alors les sommes partielles convergent vers la même limite S et la somme sur la droite converge aussi, et on obtient :

$$S = S + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k(2k-1)} \quad \text{c'est à dire} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k(2k-1)} = 0$$

Ceci est absurde. □

Remarque 2.11. Autrement dit, même si la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ converge vers 0, elle converge trop lentement pour que la série harmonique converge!! Par contre, la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge vers sa limite $\frac{\pi^2}{6}$. Ainsi, il faut qu'une suite $(u_n)_n$ tende suffisamment vite vers 0 pour que la série $\sum u_n$ converge. On voit que tout se passe à l'infini. On verra plus tard que l'exposant limite de convergence est $s = 1$. C'est à dire que la série $\sum \frac{1}{n}$ converge si et seulement si $s > 1$.

Définition 2.12. *Soit E un espace vectoriel normé, de norme $\|.\| : E \to \mathbb{R}_+$, et soit $u : \mathbb{N} \to E$ une suite. On dit que la série $\sum u_n$ est convergente* en norme *(par rapport à la norme $\|.\|$) si la série numérique positive $\sum ||u_n||$ est convergente. On dit que la série $\sum u_n$ est* inconditionnellement convergente *si l'ordre de sommation n'a pas d'influence sur la nature (convergente) de la série et sa limite.*

Bien sûr, et c'est tout l'intérêt de la définition. Toutes les séries convergentes ne sont pas convergentes en norme ou inconditionnellement convergentes. Le résultat suivant est central dans le cours et explore le lien entre convergence en norme et convergence classique :

Proposition 2.13. *Soit $(E, \|.\|)$ est un espace de Banach. Si une série de vecteurs est convergente en norme alors elle est (inconditionnellement) convergente.*

Démonstration. Nous allons montrer que la convergence en norme de la série implique la convergence de la série. Nous n'adresserons pas la question de la convergence inconditionnelle qui est beaucoup plus compliquée. Soit $(u_n)_n$ une suite de vecteurs de E. Supposons que la série $\sum u_n$ est convergente en norme. Notons $T_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} ||u_k||$ le reste de rang n de la série $\sum \|u_n\|$ et notons $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ la somme partielle de la suite de vecteurs $(u_n)_n$.

On veut montrer que la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ est une suite de Cauchy. La complétude de E nous permet de conclure sur sa convergence. Soit donc $p, q \in \mathbb{N}$ tels qu'on peut supposer $p \leq q$ (la preuve est la même si c'est l'autre cas), nous avons alors :

$$\|S_p - S_q\| = \left\| \sum_{k=p+1}^{q} u_k \right\| \leq \sum_{k=p+1}^{q} \|u_k\| = T_q - T_p$$

En faisant le même raisonnement avec $q \leq p$, on a que $\|S_p - S_q\| \leq T_p - T_q$. En comparant les deux résultats, on voit donc que :

$$\forall\, p, q \in \mathbb{N} \qquad \|S_p - S_q\| \leq |T_p - T_q|$$

Mais comme la série $\sum \|u_n\|$ converge, la suite des restes $(T_n)_n$ converge vers 0, donc est une suite de Cauchy. Soit $\epsilon > 0$, il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $p, q \geq N$, on a $|T_p - T_q| < \epsilon$. Mais dans ce cas on a aussi que $\|S_p - S_q\| \leq \epsilon$. Ce résultat étant vrai pour tout choix d'epsilon, nous voyons que la suite $(S_n)_n$ est une suite de Cauchy. Comme l'espace E est complet, elle converge. Donc la série $\sum u_n$ converge. □

Nous voyons que la complétude de l'espace E est cruciale dans la preuve. Dans les espaces vectoriels non-complets, il existe donc des séries convergentes en normes qui ne sont pas convergente, par exemple prenons l'exemple suivant : l'espace vectoriel normé est $\mathcal{C}^0([0,1])$ muni de la norme 1. Ce n'est pas un espace complet pour cette norme, comme on l'avait vu dans l'Exemple 1.87. Prenons la suite de fonctions $(f_n)_n$ définie dans cet exemple. La série télescopique $\sum f_n - f_{n-1}$ converge en norme 1 car pour tout $n \geq 1$:

$$\|f_{n+1} - f_n\|_1 = \int_0^1 |f_{n+1} - f_n| = \int_0^1 f_n - f_{n+1} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)} = \frac{1}{2n(n+1)} \leq \frac{1}{2n^2}$$

Or nous savons que la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (vers $\frac{\pi^2}{6}$). Donc la série numérique positive $\sum \|f_n - f_{n-1}\|_1$ converge aussi car majorée par la série $\sum \frac{1}{n^2}$. Par contre la série télescopique $\sum f_n - f_{n-1}$ ne converge pas car la suite $(f_n)_n$ est divergente : la fonction limite simple vit en dehors de $\mathcal{C}^0([0,1])$.

En réalité, la Proposition 2.13 est d'ailleurs une caractérisation des espaces de Banach, car on peut montrer qu'un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ est de Banach si et seulement si, dans cet espace, toute série convergente en norme est (inconditionnellement) convergente. En ce qui concerne la réciproque de la Proposition 2.13, nous avons le résultat suivant qui précise ce qu'il se passe :

Theorème de Dvoretzky–Rogers. *Soit E un espace de Banach. La dimension de E est finie si et seulement si toute série inconditionnellement convergente est convergente en norme.*

Avec ce théorème nous voyons donc que le paradis des séries ce sont les espaces vectoriels normés de dimension finie. En effet, ils sont automatiquement complets par la proposition 1.79, et avec le théorème ci dessus nous voyons que la convergence en norme est une convergence robuste pour les séries de vecteurs en dimension finie. Nous étudierons donc d'abord les séries dans les espaces de Banach de dimension finie, puis dans les espaces de Banach de dimension infinie indénombrable – et notamment les séries de fonctions.

2.2 Séries numériques

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, disons $\dim(E) = m$. Soit $(e_1, \ldots, e_m)$ une base de E. Soit $(u_n)_n$ une suite de vecteurs de E. Pour tout n entier, on peut décomposer le vecteur $u_n \in E$ sur la base, en termes de ses composantes $\lambda_n^1, \ldots, \lambda_n^m$:

$$u_n = \lambda_n^1 e_1 + \lambda_n^2 e_2 + \ldots + \lambda_n^m e_m$$

Rappel : les exposants ne sont pas des puissances mais des notations ! Pour chaque $1 \leq k \leq m$, la suite des k-èmes composantes $(\lambda_n^k)_n$ est une suite réelle. Nous avons le résultat suivant qui explique pourquoi nous pouvons passer à l'étude des séries numériques à la place des séries de vecteurs en dimension finie :

Proposition 2.14. *La série $\sum u_n$ converge si et seulement si les m séries numériques $\sum \lambda_n^k$ convergent, pour $1 \leq k \leq m$. De plus, si tel est le cas :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n^k \right) e_k$$

Ainsi, la convergence d'une série de vecteurs d'un espace vectoriel normé de dimension finie revient à la convergence des séries de ses composantes. On peut donc se ramener à l'étude des séries numériques réelles pour comprendre beaucoup de choses factuelles sur la convergence des séries de vecteurs dans le cas de la dimension finie. En dimension infinie – par exemple dans les espaces de fonctions – nous ne pouvons pas faire l'économie de l'étude directe des séries de vecteurs/fonctions. Nous adresserons ce cas plus tard.

Commençons par l'étude des séries numériques à termes positifs car leur connaissance nous aidera pour toutes les séries numériques réelles. Soit $(u_n)_n$ une suite réelle positive. Dans ce cas, la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ est une suite réelle positive *croissante*. Nous avons donc les quelques résultats immédiats obtenus directement à partir des mêmes résultats sur les suites :

Proposition 2.15. *Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles positives, alors :*

— *La série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite $(S_n)_n$ est majorée.*

— *Si jamais $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, nous avons que si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ aussi, et si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ aussi.*
— *Si jamais $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature (simultanément convergente ou simultanément divergente).*

Exemple 2.16. Un example fondamental : les séries de Riemann. Soit $s \in \mathbb{R}$, étudions la série $\sum \frac{1}{n^s}$ (où $n \geq 1$).

— Si $s \leq 0$, la suite $\left(\frac{1}{n^s}\right)_n$ ne tend pas vers 0 donc la série est grossièrement divergente.
— Si $s \in]0,1]$, pour tout $n \geq 1$, on a $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^s}$, or la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge par la Proposition 2.10, donc la série $\sum \frac{1}{n^s}$ diverge aussi.
— Si $s > 1$, on va chercher une série télescopique $\sum u_{n+1} - u_n$ d'une suite convergente $(u_n)_n$, telle que $u_{n+1} - u_n \sim \frac{1}{n^s}$. Essayons la "primitive discrète" de $\frac{1}{n^s}$, c'est à dire qu'en s'inspirant de l'intégration $\int^x t^{-s}dt = \frac{x^{1-s}}{1-s}$, on pose, pour tout $n \geq 1$, $u_n = \frac{n^{1-s}}{1-s}$. En connaissant le développement limité de $(1+x)^{1-s} = 1 + (1-s)x + o(x)$, nous avons :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{1-s}\left((n+1)^{1-s} - n^{1-s}\right) = \frac{n^{1-s}}{1-s}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1-s} - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-s}}{1-s}\frac{1-s}{n} = \frac{1}{n^s}$$

Donc la série $\sum \frac{1}{n^s}$ est de la même nature que la série télescopique $\sum u_{n+1} - u_n$, qui converge si et seulement si la suite $(u_n)_n$ converge. Comme $1 - s < 0$, la suite $(u_n)_n$ converge vers 0, donc la série $\sum \frac{1}{n^s}$ converge quand $s > 1$.

Théorème 2.17. Séries de Riemann. *La série $\sum \frac{1}{n^s}$ est convergente si et seulement si $s > 1$.*

Démonstration. Une autre preuve de la convergence de la série $\sum \frac{1}{n^s}$ pour $s > 1$ est donnée par Cauchy dans son cours d'Analyse à l'Ecole Polytechnique de 1821. Soit $p \geq 1$, la somme partielle $S_{2^{p+1}-1}$ de la série $\sum \frac{1}{n^s}$ au rang $2^{p+1} - 1$ peut se couper en sommes de 2^k termes pour $k = 1, \ldots, p$:

$$S_{2^{p+1}-1} = \sum_{n=1}^{2^{p+1}-1} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1^s} + \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s}\right) + \left(\frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s}\right) \ldots + \sum_{i=0}^{2^p-1} \frac{1}{(2^p+i)^s} = \sum_{k=0}^{p}\sum_{i=0}^{2^k-1} \frac{1}{(2^k+i)^s}$$

On observe que chaque paquet peut être majoré de façon intelligente :

$$\frac{1}{1^s} = 1, \qquad \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} \leq \frac{2}{2^s} = \frac{1}{2^{s-1}}, \qquad \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s} \leq \frac{4}{4^s} = \frac{1}{4^{s-1}} = \frac{1}{2^{2(s-1)}} = \left(\frac{1}{2^{(s-1)}}\right)^2,$$

et plus généralement, nous avons la majoration suivante de chaque paquet :

$$0 \leq \sum_{i=0}^{2^k-1} \frac{1}{(2^k+i)^s} = \frac{1}{(2^k)^s} + \frac{1}{(2^k+1)^s} + \frac{1}{(2^k+2)^s} + \ldots + \frac{1}{(\underbrace{2^k + 2^k - 1}_{2^{k+1}-1})^s} \leq \frac{2^k}{(2^k)^s} = \frac{1}{(2^k)^{s-1}} = \left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^k$$

Et donc la somme partielle $S_{2^{p+1}-1}$ peut être majorée :

$$0 \leq S_{2^{p+1}-1} \leq \sum_{k=0}^{p} \left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^k$$

On reconnait à droite la somme partielle de la série géométrique, de coefficient $\frac{1}{2^{s-1}}$. Cemme $s - 1 > 0$, on a que $\frac{1}{2^{s-1}} < 1$ et donc la série géométrique $\sum \frac{1}{2^{s-1}}$ est convergente, et admet pour limite $\frac{1}{1-\frac{1}{2^{s-1}}}$. Du fait que la série numérique positive de terme général $\frac{1}{n^s}$ est majorée par la série géométrique de terme général $\frac{1}{2^{s-1}}$, la série de Riemann converge. □

Proposition 2.18. *Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suite réelles positives telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Nous avons les résultats suivants :*

- *Si la série $\sum v_n$ est divergente, alors $\sum u_n$ aussi et $S_n(u) \underset{n\to+\infty}{\sim} S_n(v)$.*
- *Si la série $\sum v_n$ est convergente, alors $\sum u_n$ aussi et $R_n(u) \underset{n\to+\infty}{\sim} R_n(v)$.*

Remarque 2.19. Résultats similaires avec grand O : $u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n)$ (c'est à dire que $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_n$ est une suite bornée), et petit o : $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$ (c'est à dire que $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_n$ est une suite qui converge vers 0).

Avec ce résultat revenons sur les séries de Riemann. Pour tout $s \neq 1$, nous savons que :

$$\frac{1}{n^s} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_{n+1} - u_n, \qquad \text{où } u_n = \frac{n^{1-s}}{1-s} \text{ pour tout } n \geq 1.$$

- Si $s < 1$, la série $\sum \frac{1}{n^s}$ est divergente, donc nous avons équivalence des sommes partielles :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^s} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} u_{k+1} - u_k = u_{n+1} - u_1 = \frac{(n+1)^{1-s}}{1-s} - \frac{1}{1-s}$$

  Or u_1 est constante et $u_{n+1} - = \frac{(n+1)^{1-s}}{1-s} \sim \frac{n^{1-s}}{1-s}$, donc on obtient l'équivalent suivant de la somme partielle :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^s} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-s}}{1-s}$$

- Si $s > 1$, la série $\sum \frac{1}{n^s}$ est convergente, donc nous avons équivalence des restes :

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{\infty} u_{k+1} - u_k = -u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-s}}{1-s}$$

  On obtient donc cette fois ci un équivalent du reste :

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{n^{1-s}}{1-s} = \frac{n^{1-s}}{s-1}$$

- Pour $s = 1$, la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ est divergente. Inspirons nous de l'intégration $\int_1^x \frac{dt}{t}$ et prenons $\ln(n)$ comme primitive discrète de $\frac{1}{n}$. Rappelons alors que

$$\ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

  Dans ce cas d'après la proposition, nous avons que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$$

  Autrement dit nous avons l'équivalent des sommes partielles de la série harmonique, très important :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$$

Souvent, il est plus facile de manipuler une intégrale qu'une somme. Faisons un petit rappel. Soit $a \geq 0$, $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue (par morceaux) sur $[a, +\infty[$. On dit que l'intégrale impropre de f sur $[a, +\infty[$ converge si la limite suivante existe et est finie :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\, dt$$

et dans ce cas on note cette limite $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ ou plus simplement $\int_a^{+\infty} f$. Si la limite n'est pas finie ou n'existe pas on dit que l'intégrale de f diverge. Par la suite nous allons principalement prendre des fonctions positives.

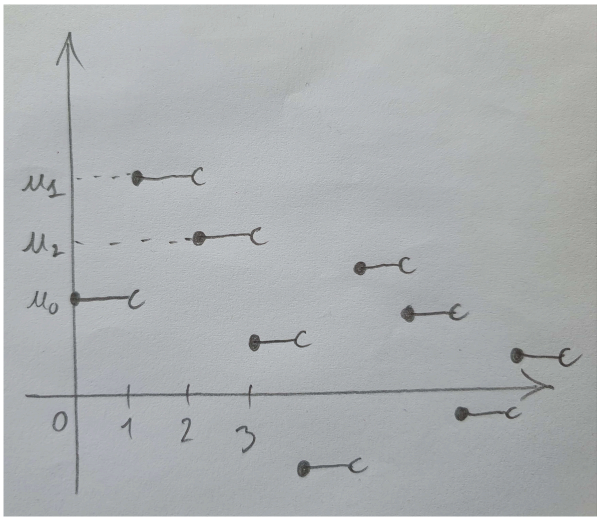
Exemple 2.20. La fonction $x \mapsto \int_1^x \frac{dt}{t} = lnx$ tend vers l'infini quand x tend vers l'infini donc l'intégrale de la fonction $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}, t \mapsto \frac{1}{t}$ diverge : on ne peut pas intégrer la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $[1, +\infty[$. Par contre l'intégrale de la fonction $t \mapsto 1/t^2$ converge, avec pour limite $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{+\infty} = 1$.

L'analogie qui existe entre les propriétés des intégrales impropres de la forme $\int_0^{\infty} f(t)dt$ et celles des séries $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ sont évidentes. Pour toute suite $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \mapsto u_n$, on définit la fonction suivante :

$$\begin{aligned} f \,:\, [0, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto u_{E(x)} \end{aligned}$$

Donc en particulier, sur l'intervalle semi-ouvert $[k, k+1[$, on a $f(x) = u_k$. Et si on intègre sur cet intervalle on a :

$$\int_k^{k+1} f(t)\, dt = \int_k^{k+1} u_k\, dt = u_k \cdot [(k+1) - k] = u_k$$

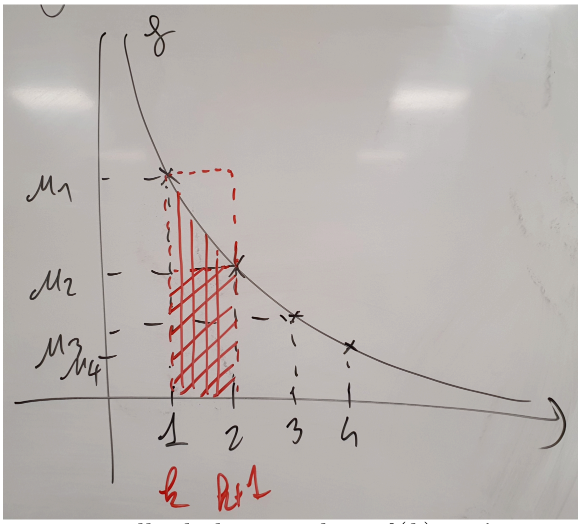


C'est une fonction continue par morceaux donc intégrable sur tout segment $[0, n]$. Dans ce cas nous avons le résultat immédiat :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} u_k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \int_k^{k+1} u_k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \int_k^{k+1} f(t)\, dt \\ &= \int_0^{n+1} f(t)\, dt \end{aligned}$$

Comme l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f$ est la limite quand n tend vers $+\infty$ du membre de droite, nous avons donc que la suite de sommes partielles $(S_n)_n$ converge si et seulement si l'intégrale impropre de f sur $[0, +\infty[$ converge. C'est à dire que l'une converge (resp. diverge) si et seulement si l'autre converge (resp. diverge). Autrement dit *la série $\sum u_n$ converge si et seulement si la fonction f est intégrable sur* $[0, +\infty[$: la série $\sum u_n$ est de la même nature que l'intégrale impropre de f sur $[0, +\infty[$.

Nous avons commencé par prendre une suite à partir de laquelle nous avons construit une fonction continue par morceaux, puis nous avons comparé la série et l'intégrale impropre de la fonction. Maintenant, prenons l'autre sens : on prend une fonction à partir de laquelle on définit une suite, puis on comparera la série de la suite et l'intégrale impropre de la fonction. Soit $a \in \mathbb{N}$ et soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue (par morceaux), qu'on suppose positive décroissante. Dans la discussion qui suit on prend $a = 0$ mais les arguments restent les mêmes pour $a = 1$, $a = 2$, $a = 3$, ... Comme f est décroissante, nous avons l'observation évidente suivante :



$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in [k, k+1] \quad f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$$

et donc en intégrant sur le segment $[k, k+1]$ de longueur 1, on obtient :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)\, dt \leq f(k)$$

puis en sommant de $k = 0$ à $k = n - 1$, pour un entier naturel $n - 1$ fixé, nous obtenons :

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k+1) \leq \int_0^n f(t)\, dt \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(k)$$

C'est à dire, en notant $S_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f(k)$ la somme partielle de la suite $k \mapsto f(k)$, qu'on a :

$$S_n(f) - f(0) \leq \int_0^n f(t)\, dt \leq S_{n-1}(f) = S_n(f) - f(n) \tag{2.1}$$

De façon équivalente, cette inégalité peut se récrire :

$$f(n) + \int_0^n f(t)\, dt \leq S_n(f) \leq f(0) + \int_0^n f(t)\, dt \tag{2.2}$$

Le raisonnement pour obtenir ces deux inégalités sont à apprendre par coeur, pour les fonctions réelles continues par morceaux positives décroissantes. Des deux inégalités précédentes, nous avons le résultat suivant :

Proposition 2.21. *Soit $a \in \mathbb{N}$, et $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux positive décroissante. Alors :*

- *la série $\sum f(n)$ est convergente si et seulement si f est intégrable sur $[a, +\infty[$;*
- *si la série $\sum f(n)$ est divergente, alors $S_n(f) \underset{n \to +\infty}{\sim} \int_a^n f(t)dt$;*
- *si la série $\sum f(n)$ est convergente, alors $R_n(f) \underset{n \to +\infty}{\sim} \int_n^{+\infty} f(t)dt$;*
- *la série $\sum u_n$ de terme général $u_n = \int_{n-1}^n f(t)dt - f(n)$ converge.*

Démonstration. Pour la preuve on suppose que $a = 0$ mais tout s'adapte à n'importe que a entier. Pour le premier, le deuxième et le troisième point, nous venons de voir la démonstration : les encadrements (2.1) et (2.2) permettent de nous dire que la série $\sum f(n)$ et l'intégrale impropre de f sur $[0, +\infty[$ sont de même nature (pour le point 1), et de trouver un équivalent (pour les points 2 et 3). Pour le quatrième point, nous observons que pour tout $n \geq 1$:

$$u_n = \int_{n-1}^n \underbrace{(f(t) - f(n))}_{\geq 0} dt \geq 0$$

car la fonction f est décroissante. On a donc bien une suite réelle positive. On peut majorer les sommes partielles de la série $\sum u_n$ pour montrer qu'elle converge. Soit $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n \left(\int_{k-1}^k f(t)dt - f(k) \right) = \int_0^n f(t)dt - S_n(f) + f(0)$$

En utilisant l'inégalité de droite de (2.2), nous voyons que $\int_0^n f(t)dt - S_n(f) \leq -f(n)$. EN se rappelant que la fonction f est positivie, nous obtenons que $\sum_{k=1}^n u_k \leq f(0) - f(n) \leq f(0)$, ce qui majore les sommes partielles de la série $\sum u_n$. $\square$

Remarque 2.22. Nous pouvons interpréter la convergence de la série $\sum u_n$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, la quantité u_k est l'aire du triangle curviligne sous la courbe de f, au dessus du rectangle de hauteur $f(k)$ et de base le segment $[k-1, k]$. Comme la fonction f est décroissante, cette aire est décroissante, c'est à dire que la suite réelle positive $(u_n)_n$ décroît. La somme partielle des aires de tous ces rectangles entre $k = 1$ et $k = n$ est la somme partielle $\sum_{k=1}^n u_k$. Quand on fait tendre n vers $+\infty$, on voit que la série converge car elle ne peut pas être plus grande que $f(0)$ (le majorant qu'on a vu dans la preuve).

Exemple 2.23. Soit $f = \frac{1}{\sqrt{x}}$ fonction positive décroissante sur $]0, +\infty[$, on utilise l'encadrement

$$f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(t)dt \leq f(n-1)$$

pour déduire un équivalent de la somme partielle $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$. On déduit l'encadrement pour $n \geq 2$:

$$\int_1^{n+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 1 + \int_1^n \frac{dt}{\sqrt{t}}$$

En intégrant on a :

$$2\sqrt{n+1} - 2 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n} - 1$$

On en déduit que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \sim 2\sqrt{n}$.

Grace au deuxième point de la Proposition 2.21, on peut arriver à ce résultat plus rapidement : on sait que $S_n(f) - \int_1^n f(t)dt$ converge vers une limite finie ℓ. On a alors :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = \int_1^n \frac{dt}{\sqrt{t}} + \ell + o(1)$$

Et donc comme on connait l'intégrale, qui vaut $2\sqrt{n} - 2$ on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = 2\sqrt{n} + \ell - 2 + o(1)$$

on obtient donc bien $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \sim 2\sqrt{n}$.

Exemple 2.24. Soit $0 < q < 1$. La fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto q^x = e^{x \ln(q)}$ est une fonction décroissante car $\ln(q) < 0$. Or nous savons que la série géométrique $\sum q^n = \sum f(n)$ converge (vers $\frac{1}{1-q}$). D'après le point 3 de la Proposition 2.21, nous avons donc que :

$$R_n(f) \underset{n \to +\infty}{\sim} \int_n^{+\infty} e^{t \ln(q)} dt = -\frac{q^n}{\ln(q)}$$

Trouver l'équivalent du reste d'une série convergente peut être utile un jour.

Nous pouvons revisiter les séries de Riemann avec cette proposition. Soit $s \neq 1$, et soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors nous avons alors que

$$\int_1^n \frac{dt}{t^s} = \left[\frac{t^{1-s}}{1-s}\right]_1^n = \frac{n^{1-s}}{1-s} - \frac{1}{1-s}$$

Si $s > 1$, alors nous avons que $0 > 1 - s$ et donc lorsque n tend vers l'infini, $\frac{n^{1-s}}{1-s}$ tend vers 0 et l'intégrale $\int_1^n \frac{dt}{t^s}$ converge (vers $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^s} = -\frac{1}{1-s} > 0$). Cela nous dit que la série $\sum \frac{1}{n^s}$ pour $s > 1$ converge (vers une limite différente de $\frac{1}{s-1}$). D'après le point 3 de la Proposition 2.21 :

$$R_n(f) \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^s} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{n^{1-s}}{1-s}$$

Si $s < 1$, alors nous avons que $0 < 1 - s$ donc lorsque n tend vers l'infini, $\frac{n^{1-s}}{1-s}$ tend vers l'infini et l'intégrale $\int_1^n \frac{dt}{t^s}$ explose (diverge vers + infini). La série $\sum \frac{1}{n^s}$ pour $s < 1$ tend vers l'infini, et on a d'après le point 2 de la Proposition 2.21 :

$$S_n(f) \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_0^n \frac{dt}{t^s} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-s}}{1-s}$$

Si $s = 1$, la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Elle est de la même nature que l'intégrale impropre $\int_1^n \frac{1}{t} dt = ln(x)$ qui tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. D'après le point 2 de la Proposition 2.21, on retrouve l'équivalent des sommes partielles qu'on avait déjà obtenu :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$$

Dans la suite, pour tout $n \geq 2$, posons $u_n = \int_{n-1}^n \frac{dt}{t} - \frac{1}{n} = \ln(n) - \ln(n-1) - \frac{1}{n}$. Le point 4 de la Proposition 2.21 nous dit que la série $\sum u_n$ converge. Ecrivons les sommes partielles :

$$\sum_{k=2}^{n} u_k = \sum_{k=2}^{n} \ln(k) - \ln(k-1) - \frac{1}{k} = \ln(n) - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Cela veut dire que pour tout $n \geq 2$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) = 1 - \sum_{k=2}^{n} u_k$$

La série de droite converge d'après le point 4 de la Proposition 2.21. Donc le membre de droite converge vers une limite, qu'on note γ. Cela veut dire que la différence $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ tend vers cette limite finie. On appelle γ la *constante d'Euler*. C'est un nombre qui vaut environ 0,5772156, et on ne sait pas encore s'il est irrationnel mais si il était rationnel, le dénominateur possèderait au moins 242000 chiffres.

Pour les séries numériques positives, nous ajoutons deux autres critères pour déterminer si une série est convergente ou divergente. Le premier revient à se comparer à une série géométrique :

Proposition 2.25. Critère de d'Alembert. *Soit* $(u_n)_n$ *une suite réelle* strictement *positive, telle que la suite* $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_n$ *converge vers une limite* $L \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. *Alors :*

— *si* $L>1$, *la série* $\sum u_n$ *est grossièrement divergente ;*

— *si* $L < 1$, *la série* $\sum u_n$ *est convergente ;*

— *si* $L = 1$, *tout peut arriver.*

Exemple 2.26. Soit $\alpha > 0$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+n)}{n^n} > 0$. Et donc on utilise le critère de d'Alembert :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = (\alpha + n + 1)\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = (\alpha + n + 1)\frac{1}{n+1}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = \left(1 + \frac{\alpha}{n+1}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}$$

Le membre de droite converge vers $\frac{1}{e}$ quand n tend vers l'infini, qui est une limite strictement inférieure à 1. On en déduit avec d'Alembert que la série $\sum u_n$ converge.

Exemple 2.27. Par exemple pour les séries de Riemann on tombe dans la zone d'indécidabilité. En effet, pour tout $s \in \mathbb{R}$, nous avons :

$$\frac{\frac{1}{(n+1)^s}}{\frac{1}{n^s}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^s = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^s} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

On voit que quel que soit s, la limite L c'est 1, mais on a vu dans le Théorème 2.17 que la série $\sum \frac{1}{n^s}$ ne converge que pour $s > 1$. Ainsi tout peut arriver, tout dépend du terme général de la série.

Proposition 2.28. Critère de Cauchy. *Soit $(u_n)_n$ une suite réelle positive, telle que la suite $\left(\sqrt[n]{u_n}\right)_n$ converge vers une limite $L \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Alors :*

- *si L>1, la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente ;*
- *si $L < 1$, la série $\sum u_n$ est convergente ;*
- *si $L = 1$, tout peut arriver.*

Exemple 2.29. Soit $\alpha > 0$, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{\alpha^n}{n^n}$. Appliquons le critère de Cauchy : la suite de terme général $(u_n)^{\frac{1}{n}} = \frac{\alpha}{n}$ converge vers 0 donc la série $\sum u_n$ converge.

Remarque 2.30. Le critère de Cauchy est plus général que celui de d'Alembert, car il peut s'utiliser sur des suites qui ont des termes nuls, et permet parfois de donner des solutions que d'Alembert ne peut pas donner. Par contre il est plus difficile à mettre en place.

Nous avons étudié les séries numériques positives. Maintenant nous allons nous tourner vers le cas plus général des séries numériques dont le terme général n'est pas forcément positif, mais réel.

Définition 2.31. *Soit $(u_n)_n$ une suite réelle (ou complexe). On dit que la série $\sum u_n$ est* absolument convergente *si la série des valeurs absolues (ou modules) $\sum |u_n|$ converge.*

Proposition 2.32. *Si la série numérique $\sum u_n$ est absolument convergente, alors elle est convergente.*

Démonstration. $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des espaces de Banach (les suites de Cauchy réelles ou complexes convergent). La norme sur $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) est la valeur absolue (resp. le module). La proposition ci dessus est donc la Proposition 2.13 appliqué à $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$. □

Définition 2.33. *Soit $(u_n)_n$ une suite réelle (ou complexe). Si la série $\sum u_n$ converge mais pas la série des valeurs absolues (ou modules) $\sum |u_n|$, on dit que la série $\sum u_n$ est* semi-convergente*.*

Exemple 2.34. Soit $s \leq 1$, nous verrons dans la proposition suivante que la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^s}$ est convergente mais pas la série positive de terme général $\left|\frac{(-1)^n}{n^s}\right| = \frac{1}{n^s}$ (voir Theorème 2.17). C'est donc une série réelle semi-convergente

Pour la culture générale nous avons ce résultat fondamental et impressionnant de Riemann, qui explique la notion de convergence conditionnelle et inconditionnelle (la somme dépend de l'ordre de sommation ou non) :

Theorème de réarrangement de Riemann. *Soit $\sum u_n$ une série réelle.*

- *si $\sum u_n$ est semi-convergente, alors pour tout $L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, il existe une bijection $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (appelée* réarrangement*) tel que la série $\sum u_{\sigma(n)}$ tend vers L quand n tend vers l'infini. Autrement dit la série est* conditionnellement convergente*.*

— *si $\sum u_n$ est absolument convergente, vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ disons, alors quelle que soit le choix de bijection $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, la série $\sum u_{\sigma(n)}$ converge vers ℓ. Autrement dit la série $\sum u_n$ est* inconditionnellement convergente*.*

Ainsi pour les séries réelles à terme général positif, la convergence absolue est équivalente à la convergence, tandis que pour les séries réelles non nécessairement positives, ce n'est plus la même chose : la convergence absolue implique la convergence, mais pas l'inverse. D'autre part, si la série des $|u_n|$ est divergente, cela ne veut pas forcément dire tout le temps que la série des u_n diverge ! En effet, les termes successifs peuvent se compenser et donner une somme finie. C'est le cas en particulier des séries alternées que nous allons étudier maintenant. Elles ne forment qu'un cas particulier des séries numériques réelles, mais on les rencontre suffisamment souvent pour avoir développé un traitement à part. On se base sur le résultat suivant :

Proposition 2.35. *Soit $(u_n)_n$ une suite réelle positive décroissante convergeant vers 0. Alors la série $\sum(-1)^n u_n$ est convergente.*

Démonstration. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$ la somme partielle de la suite $((-1)^n u_n)_n$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose $x_p = S_{2p}$ et $y_p = S_{2p+1}$. On va montrer que les suites $(x_p)_p$ et $(y_p)_p$ sont adjacentes. Soit $p \in \mathbb{N}$, alors on a :

$$x_{p+1} - x_p = S_{2(p+1)} - S_{2p} = (-1)^{2(p+1)} u_{2(p+1)} + (-1)^{2p+1} u_{2p+1} = u_{2p+2} - u_{2p+1} \leq 0$$

car la suite $(u_n)_n$ est décroissante. Donc la suite $(x_p)_p$ est décroissante. Pour la même raison, on peut montrer que la suite $(y_p)_p$ est croissante.

D'autre part on a $x_p - y_p = S_{2p} - S_{2p+1} = -(-1)^{2p+1} u_{2p+1} = u_{2p+1} \geq 0$ car la suite $(u_n)_n$ est positive, donc $x_p \geq y_p$. Et comme $x_p - y_p = u_{2p+1} \longrightarrow 0$ quand p tend vers l'infini, le théorème des suites adjacentes nous dit que les suites $(x_p)_p$ et $(y_p)_p$ sont adjacentes donc convergent vers la même limite ℓ. Autrement, dit les suites des sommes partielles paires et impaires convergent vers la même limite ℓ, $\sum u_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \ell$. □

Définition 2.36. *Une série $\sum u_n$ de terme général u_n est dite* alternée *si $u_n \times u_{n+1} \leq 0$ pour tout n, autrement dit si la suite réelle de terme général $(-1)^n u_n$ est de signe constant, autrement dit si u_n et u_{n+1} sont de signe différent pour tout n.*

Exemple 2.37. Pour tout $n \geq 1$, on pose $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$. On peut vérifier que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $u_{2p} = \ln\left(1 + \frac{(-1)^{2p}}{2p}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{2p}\right) > 0$ tandis que $u_{2p+1} = \ln\left(1 + \frac{(-1)^{2p+1}}{2p+1}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{2p+1}\right) < 0$. $\sum u_n$ est donc bien une série alternée.

En particulier, le signe du terme u_{2p} est le même que celui de u_0 tandis que le signe de u_{2p+1} est le même que celui de u_1 pour tout entier p. Et donc si u_0 est positif alors $u_n = (-1)^n |u_n|$ tandis que si u_0 est négatif, on a $u_n = -(-1)^n |u_n|$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. La Proposition 2.35 peut se récrire de façon équivalente comme un critère de convergence des séries alternées :

Théorème 2.38. Critère de Leibniz (en 1714 dans une lettre à Bernoulli) *: On considère la série alternée de terme général u_n. On suppose réalisées les conditions suivantes :*

— *la suite réelle positive $(|u_n|)_n$ est* décroissante *;*

— *la limite de la suite $(|u_n|)_n$ est* zéro*.*

Alors la série alternée $\sum u_n$ converge.

Exemple 2.39. La série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est manifestement une série alternée qui satisfait aux critères de Leibniz. Elle converge donc. On peut montrer par comparaison série-intégrale que sa limite est $-\ln(2)$, c'est à dire que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$.

Remarque 2.40. Attention ce résultat ne dit rien sur la série des valeurs absolues $|u_n|$ qui peut totalement diverger !!! Par exemple prenons $0 < s \leq 1$ et posons $u_n = \frac{(-1)^n}{n^s}$. Alors $|u_n| = \frac{1}{n^s}$, ce qui fait que la suite $(|u_n|)_n$ est positive, décroissante et tend vers 0. Donc le critère des séries alternées s'applique et la série $\sum u_n = \sum \frac{(-1)^n}{n^s}$ converge, même si la série $\sum |u_n| = \sum \frac{1}{n^s}$ diverge (série de Riemann). Pour $s = 1$, la limite de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est $-\ln(2)$ mais la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Ainsi, des séries qui ne sont pas absolument convergentes peuvent être convergentes. L'hypothèse sur la décroissance de la suite v_n est cruciale pour la preuve du théorème, et d'ailleurs on a un contre exemple. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$; on peut vérifier que c'est bien une suite qui vérifie $u_n \times u_{n+1} \leq 0$, donc la série $\sum u_n$ est alternée. Cependant la suite de terme général $|u_n| = \frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ n'est pas décroissante : elle varie à cause du terme en (-1) au dénominateur. Donc la première hypothèse du théorème de Leibniz n'est pas satisfaite. On a l'équivalent suivant : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Or la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est alternée et satisfait le Théorème 2.38, donc elle est convergente.CEPENDANT on ne peut pas utiliser la proposition de comparaison 2.18 des séries positives, précisément car $(u_n)_n$ n'est pas une suite positive. En effet posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$w_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - u_n = \frac{1}{n + (-1)^n\sqrt{n}}$$

C'est un nombre réel positif équivalent à $\frac{1}{n}$ quand n tend vers l'infini car $nw_n \longrightarrow 1$ quand n tend vers l'infini. Par la proposition de comparaison 2.18 – cette fois-ci la suite $(w_n)_n$ est positive – la série des w_n diverge puisque la série harmonique diverge !! La série des u_n est donc la différence d'une série alternée convergente $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et d'une série positive divergente $\sum w_n$, elle est donc divergente. Cet exemple présente aussi l'intérêt de mettre en évidence deux séries, l'une convergente, l'autre divergente, dont les termes généraux sont équivalents. Il montre que le théorème de comparaison ne s'applique qu'à des séries à termes tous de même signe.

Proposition 2.41. *Soit $\sum u_n$ une série alternée convergente. Alors le reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est tel que : 1. R_n est du signe de u_{n+1}, et 2. $|R_n| \leq |u_{n+1}|$.*

Pour finir et résumer cette section, on peut donc procéder comme suit pour analyser une série réelle quelconque $\sum u_n$. On regarde d'abord si la suite $(u_n)_n$ ne tend pas vers 0 : c'est un critère de divergence grossière. On regarde ensuite l'absolue convergence de la série, c'est à dire qu'on étudie si la série $\sum |u_n|$ converge, et pour cela on peut utiliser les critères de convergence pour les séries à termes positifs. On peut alors utiliser les théorèmes de comparaison (inégalité et équivalence) par rapport aux séries de Riemann par exemple, ou bien les critères de Cauchy et de d'Alembert. A la fin (toujours pour la série positives $\sum |u_n|$), on peut utiliser une comparaison série intégrale pour les séries les plus compliquées. Si la série n'est pas absolument convergente, c'est à dire si $\sum |u_n|$ diverge, alors cela ne veut a priori rien dire sur $\sum u_n$. On peut se demander si la série $\sum u_n$ est une série alternée, et on regarde si la suite $(u_n)_n$ satisfait les critères de Leibniz. Si enfin on n'est toujours pas dans ce dernier cas, il faut se débrouiller pour montrer que la série converge ou diverge.

Nous finissons la section sur ce résultat bonus. On dénote ℓ^1 l'espace vectoriel des suites réelles ou complexes dont la série associée est absolument convergentes, c'est à dire :

$$\ell^1 = \left\{ u : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \text{ telle que } \sum |u_n| \text{ est convergente } \right\}$$

C'est un espace de dimension infinie indénombrable. On définit une norme sur cet espace – la norme 1 – par :

$$\forall\, u \in \ell^1, \qquad \|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

Alors nous avons le résultat suivant :

Proposition 2.42. $(\ell^1, \|.\|_1)$ *est un espace de Banach.*

2.3 Séries de fonctions

Nous avons étudié les séries numériques réelles, qui permettent de coder les composantes des séries de vecteurs dans les espaces vectoriels normés de dimension finie (qui sont nécessairement de Banach). Maintenant nous allons étudier les séries dans les espaces de fonctions, qui sont des archétypes d'espaces de Banach de dimension infinie (indénombrable). On va étendre la machinerie des séries numériques réelles aux séries de fonctions. Nous avons vu que pour les suites de fonctions, il y a deux types de convergence : la convergence simple, et la convergence uniforme – plus robuste – qui correspond à la convergence par rapport à la norme infinie dans un espace de fonctions.

Nous allons utiliser ces deux types de convergence, ainsi que la convergence absolue, dans l'étude des séries de fonctions. Dans ce qui suit, $(f_n)_n$ est une suite de fonctions définies sur un sous-ensemble $D \subset \mathbb{R}$. La suite des sommes partielles de rang $n \in \mathbb{N}$ forme une suite de fonctions définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{aligned} S_n : \ D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \end{aligned}$$

La suite des sommes partielles $(S_n)_n$ est dénotée $\sum f_n$ et on l'appelle la *série de fonctions* des f_n (ou de terme général f_n). C'est une suite de fonctions, donc nous pouvons appliquer tous les résultats vus dans la Section 1.1 à ce contexte.

Définition 2.43. *On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ de terme général f_n converge* simplement *sur D si la suite de fonctions $(S_n)_n$ converge simplement sur D, et on note S la fonction limite. On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge* uniformément *vers S sur D si la suite de fonctions $(S_n)_n$ converge uniformément vers S sur D.*

Ainsi, si la série $\sum f_n$ converge simplement, la fonction limite S satisfait :

$$\forall\, x \in D \qquad S(x) = \lim_{n \to +\infty} S_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$$

C'est une fonction (pas forcément continue), appelée la *somme* de la série $\sum f_n$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on appelle le *reste d'ordre n* la somme infinie :

$$\forall\, x \in D \qquad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$$

On aura donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n + R_n = S$. Dans ce cas, la condition de convergence uniforme de $\sum f_n$ peut s'écrire comme dans la Définition 1.2 :

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in D} |S_n(x) - S(x)| = \lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in D} |R_n(x)| = 0$$

Ainsi, pour montrer la convergence uniforme d'une série de fonctions, il faut montrer que $\sup_{x \in D} |R_n(x)|$ converge vers 0 quand n tend vers l'infini.

Remarque 2.44. La plupart des résultats qu'on va voir dans cette section sont identiques à ceux vus dans la section 1.1 puisque les suites des sommes partielles de fonctions sont des suites de fonctions. En particulier, nous avons que si une série de fonctions converge uniformément alors elle converge simplement (c'est la Proposition 1.17).

Exemple 2.45. En posant $f_n :]-1,1[\to \mathbb{R}, x \mapsto x^n$, la série $\sum f_n$ admet comme terme général la somme partielle :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

Comme $|x| < 1$, la suite des sommes partielles converge simplement sur $]-1,1[$. De plus, pour tout $x \in]-1,1[$, la somme de la série est la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$ (voir l'exemple 2.3 pour une explication).

La proposition suivante est l'adaptation de la Proposition 2.7 appliquée aux espaces de fonctions, ainsi que l'adaptation de la Contraposée 2.7 :

Proposition 2.46. *Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement (resp. uniformément), alors la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement (resp. uniformément) vers la fonction constante nulle.*

Proposition 2.47. Contraposée de la Proposition 2.46. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions. Si la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas simplement vers la fonction constante nulle, alors $\sum f_n$ ne converge pas simplement (et donc la fonction somme n'existe pas). Si la suite de fonctions $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers la fonction constante nulle, alors la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas uniformément.*

Remarque 2.48. On peut reformuler la première contraposée par l'énoncé suivant : si il existe $x \in D$ tel que la suite numérique $(f_n(x))_n$ ne converge pas vers $0 \in \mathbb{R}$, alors la série numérique réelle $\sum f_n(x)$ est divergente. Ceci implique que la fonction limite simple de la série de fonctions $\sum f_n$ ne peut pas être définie en x.

Exemple 2.49. Revenons à l'exemple 1.2, où $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On sait que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction f de l'exemple 1.2, mais pas uniformément. Pour tout $x \in [0,1[$, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers la fonction $S : x \mapsto \frac{1}{1-x}$ (c'est l'exemple 2.45). Pour $x = 1$, $f_n = 1^n = 1$ donc la série numérique $\sum f_n$ ne peut pas converger simplement en $x = 1$. Et en effet, $S_n(1) = \sum_{k=0}^{n} 1^k = n+1$, donc cette suite tend vers $+\infty$ donc la série $\sum f_n$ ne converge pas simplement en $x = 1$. Et comme la suite de fonctions $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$, alors la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas uniformément.

Pour étudier la convergence simple d'une série de fonctions, nous poussons un peu plus loin les analogies avec les séries de nombres réels : séries à termes positif lorsque les f_n sont positives ou nulles (la comparaison série intégrale se fait désormais avec des intégrales à paramètres), séries alternées lorsque $(-1)^n f_n$ a signe constant.

Exemple 2.50. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{(-1)^n}{\sqrt{x^2+n^2}}$. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé, alors $(-1)^n f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+n^2}} > 0$ est de signe constant, et la suite numérique $\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+n^2}}\right)_n$ décroit et tend vers 0. Les conditions du théorème des séries alternées 2.38 sont satisfaites, alors la série $\sum f_n(x)$ converge à ce x donné. Comme cela est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement, et sa somme est une fonction bien définie sur $\mathbb{R}$ (attention pas forcément continue !).

Si une série de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement, alors la fonction somme $S = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ préserve les propriétés basiques communes à toutes les fonctions f_n :

1. si toutes les f_n sont croissantes sur un intervalle I, alors S est croissante sur I
2. si toutes les f_n sont périodiques de période T, alors S est périodique de période T
3. si toutes les f_n sont (im)paires, alors S est (im)paire

Mais ATTENTION ! les propriétés de régularité telles que continuité et dérivation ne sont pas nécessairement préservées par la convergence simple, comme on l'a vu pour les suites de fonctions.

Exemple 2.51. Soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f_n : x \mapsto x(1-x)^n$. Ce sont des fonctions continues et infiniment dérivables. Si $x = 0$ alors $f_n(x) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc la série numérique $\sum f_n(0)$ converge. Si $x \neq 0$, on peut utiliser la série géométrique pour écrire les sommes partielles de rang n :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x(1-x)^n = x\sum_{k=0}^{n}(1-x)^n x\frac{1-(1-x)^{n+1}}{1-(1-x)} = 1-(1-x)^{n+1}$$

Si $x = 2$, alors $S_n(2) = 1-(-1)^{n+1}$ donc la série numérique $\sum f_n(2)$ diverge grossièrement. D'autre part, connaissant la série géométrique de l'exemple 2.3, on déduit que la suite numérique $((1-x)^n)_n$ converge vers 0 si et seulement si $|1-x| < 1$ c'est dire si et seulement si $-1 < x-1 < 1$ c'est à dire si et seulement si $0 < x < 2$. Dans ce cas, si $x \in]0,2[$, la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ converge vers la fonction constante 1. Ainsi, on peut conclure que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,2[$ vers la fonction :

$$S(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } 0 < x < 2 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

La série de fonctions $\sum f_n$ diverge en dehors de $[0,2[$, c'est à dire sur $]-\infty,0[\cup[2,+\infty[$.

La fonction limite simple n'est pas continue donc nous savons que la suite des sommes partielles ne converge pas uniformément vers S. Nous pouvons le montrer de façon différente en définissant une suite de points $x_n \in]0,2[$ telle que 1. $(x_n)_n$ tend vers 0 et 2. $(|S_n(x_n) - S(x_n)|)_n$ ne tend pas vers 0. Dans ce cas, on aura que $||S_n - S||_\infty$ est nécessairement plus grand que zéro donc pas de convergence uniforme. Sur l'idée d'Aslı on pose $x_n = \frac{1}{n+1}$ alors on obtient :

$$|S_n(x_n) - S(x_n)| = \left|1-(1-x_n)^{n+1} - 1\right| = \left|1-\frac{1}{n+1}\right|^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{e} \neq 0$$

Dans ce cas, la série $\sum f_n$ ne converge pas uniformément vers la fonction discontinue S.

La convergence uniforme par contre préserve tous les résultats de régularité obtenus sur les suites de fonctions car on les applique aux suites des sommes partielles. Donc nous avons le résultat suivant pour les séries de fonctions qui convergent uniformément, qui est une application du Théorème 1.18 aux suites des sommes partielles des suites de fonctions :

Proposition 2.52. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de D dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). On suppose :*

1. *chaque fonction f_n est continue ;*
2. *la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur D.*

Alors la somme de la série $S = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k$ est continue.

Exemple 2.53. La série de fonctions de terme général $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{(1+x^2)^n}$ converge simplement mais pas uniformément.

Exemple 2.54. La série de fonctions de terme général $f_n :]0,+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{(-1)^n}{x+n}$ converge uniformément donc la fonction somme est continue.

Exemple 2.55. Pour tout $x \in]1, +\infty[$, on pose $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$. La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]1, +\infty[$ (Theorème 2.17), et sa somme est la fameuse fonction ζ (zêta) de Riemann :

$$\begin{aligned} \zeta : \ ]1, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \end{aligned}$$

Elle ne converge pas uniformément sur $]1, +\infty[$ pour la raison suivante : prenons la suite de terme général $x_n = 1 + \frac{1}{n} > 1$; elle tend vers 1 par la droite, et ontrons que la différence $\zeta(x_n) - S_n(x_n)$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers l'infini, ce qui prouve que la convergence n'est pas uniforme sur l'intervalle ouvert $]1, +\infty[$. Nous avons l'équivalent suivant grâce à la proposition 2.21 :

$$\zeta(x_n) - S_n(x_n) = R_n(x_n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{1+\frac{1}{n}}} \underset{n \to +\infty}{\sim} \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+\frac{1}{n}}} = \left[-\frac{n}{x^{\frac{1}{n}}} \right]_n^{+\infty} = n^{1-\frac{1}{n}}$$

Nous voyons que $\zeta(x_n) - S_n(x_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} n^{1-\frac{1}{n}}$ c'est à dire que lorsqu'on fait tendre n vers $+\infty$, la différence $\zeta(x_n) - S_n(x_n)$ tend aussi vers l'infini donc il n'y a pas de borne supérieure à la différence $\zeta(x) - S_n(x)$: la série $\sum \frac{1}{n^x}$ ne peut pas converger uniformément vers la fonction ζ sur l'intervalle ouvert $]1, +\infty[$. Par contre la série est uniformément convergente sur tout intervalle semi-ouvert $[a, +\infty[$. On peut le montrer par comparaison série-intégrale car :

$$0 \leq \sup_{x \in [a, +\infty[} |\zeta(x) - S_n(x)| \leq \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^a} = \frac{1}{a-1} \frac{1}{n^{a-1}}$$

Le terme de droite tend vers 0 car $a > 1$ donc par le théorème des gendarmes on la norme infinie $\|\zeta - S_n\|_\infty$ converge vers 0. La convergence uniforme d'une série de fonctions continues sur tout segment de $] - 1, +\infty[$ nous dit que la fonction ζ est continue.

Et maintenant étudions la permutation somme-intégrale et somme-dérivation qu'on retrouvait déjà dans le Mémoire sur les fonctions discontinues de Darboux (1875), et qui sont juste des applications des Propositions 1.24 et 1.27 aux suites des sommes partielles des suites de fonctions :

Proposition 2.56. *Soit $a < b$ deux réels, et $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues (par morceaux) de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément, vers une fonction continue (par morceaux) $S : [a, b] \to \mathbb{R}$. Alors la série numérique de terme général $\int_a^b f_n(t) dt$ converge et sa limite est l'intégrale de S :*

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b S_n(t)\, dt = \int_a^b S(t)\, dt$$

c'est à dire qu'on peut permuter le signe somme et le signe intégrale :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\, dt = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\, dt$$

Proposition 2.57. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$, et $(f_n)_n$ une suite de fonctions $\mathcal{C}^1$ sur I. On suppose que :*

1. *la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I, vers la fonction somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$;*
2. *la série de fonctions $\sum f'_n$ converge uniformément sur (tout segment de) I, vers une fonction (nécessairement continue) $T : I \to \mathbb{R}$.*

Alors :

1. *la série de fonctions* $\sum f_n$ *converge uniformément sur (tout segment de)* I *vers* S*, et*
2. *la fonction* S *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* I *et* $S' = T$*, c'est à dire :*
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{dS_n}{dx} = \frac{dS}{dx}$$

Autrement dit, on peut permuter le signe somme et la dérivation :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n' = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)'$$

Remarque 2.58. Bien entendu, la Proposition 2.57 se généralise immédiatement aux ordres de dérivation supérieurs en remplaçant les dérivées simples par des dérivées k-ièmes.

Exemple 2.59. Pour tout $n \geq 1$, la fonction $f_n :]1, +\infty[\to \mathbb{R}, x \to \frac{1}{n^x}$ est infiniment dérivable et $f_n^{(k)}(x) = \frac{(-\ln(n))^k}{n^x}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. A l'aide de la Proposition 2.57 (généralisée aux fonctions $\mathcal{C}^\infty$), on montre que la fonction ζ de Riemann est infiniment dérivable, et :

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in]1, +\infty[\qquad \zeta^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln(n))^k}{n^x}$$

Remarque 2.60. Il y a une différence entre une propriété locale et globale : on peut satisfaire une propriété au voisinage de tout point mais pas sur tout l'ensemble de définition. Par exemple la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est intégrable sur tout segment $[a, b]$ inclus dans $]0, +\infty[$, mais pas sur l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$ entier. De même, continuité uniforme en tout point n'implique pas continuité uniforme sur tout l'intervalle de définition (même fonction). Et on a vu plein d'exemples de suites de fonctions qui convergent uniformément sur tout segment de l'ensemble de définition mais pas sur l'ensemble entier. Par contre, la continuité et la dérivabilité sont des propriétés qui, si elles sont satisfaites localement partout sur l'ensemble, alors elles sont satisfaites globalement (c'est même la définition d'être continue/dérivable). e passage du local au global est un grand problème en mathématique et on a des technique pour savoir si certains objets ayant une propriété locale, préservent cette propriété au global. Par exemple la Cohomologie de de Rham en géométrie différentielle : toute forme fermée est localement exacte, mais pas forcément globalement exacte, et la cohomologie mesure cela.

Comme pour les séries numériques, il existe des conditions de convergences plus strictes, propres aux séries dans les espaces vectoriels normés (voir Definitions 2.12 et 2.31) :

Définition 2.61. *Soit* $(f_n)_n$ *une suite de fonctions définies sur une partie* D *de* $\mathbb{R}$*. On dit que la série de fonctions* $\sum f_n$ *de terme général* f_n *converge :*

1. absolument *si la série de fonctions* $\sum |f_n|$ *converge simplement ;*
2. normalement *si la série numérique* $\sum ||f||_\infty$ *converge, c'est à dire si la série de fonctions* $\sum f_n$ *converge* en norme.

Remarque 2.62. Pour la convergence normale, toutes les fonctions f_n doivent nécessairement être bornées pour que leur norme infinie soit bien définie. La convergence normale correspond donc à la convergence en norme dans l'espace de Banach $\mathcal{B}(D)$.

Remarque 2.63. La notion de convergence absolue est une forme de convergence simple pour la série de fonctions positives $|f_n|$. La convergence normale est une condition très forte, parfois peut être trop forte, mais très utile car on se ramène à une série numérique. Par contre, comme c'est une série numérique, connaitre la convergence de cette série ne nous dit RIEN sur la fonction limite de $\sum f_n$. il faut donc toujours calculer la limite simple.

Exemple 2.64. La série de fonctions $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^2+x^2}$ est normalement convergente (par majoration).

Proposition 2.65. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur une partie $D \subset \mathbb{R}$. Nous avons le losange d'implications suivantes :*

$$\begin{tikzcd}
 & \sum f_n \ CVA \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\sum f_n \ CVN \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \sum f_n \ CVS \\
 & \sum f_n \ CVU \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

Démonstration. L'implication $CVU \implies CVS$ est la Proposition 1.17 appliquée à la suite des sommes partielles de la suite de fonctions $(f_n)_n$.

L'implication $CVA \implies CVS$ se montre très simplement. Soit $x \in D$. Comme la série de fonctions $\sum f_n$ converge absolument dans le sens de la Définition 2.61, la série numérique $\sum f_n(x)$ est absolument convergente dans le sens de la Definition 2.31, et donc elle est convergente. Ceci étant vrai pour tout $x \in D$, la suite de fonctions $\sum f_n$ est simplement convergente.

L'implication $CVN \implies CVA$ est aussi très simple. Tout d'abord, le fait que la série de fonctions $\sum f_n$ est normalement convergente veut dire que la série numérique $\sum ||f_n||_\infty$ converge sur D. Or, pour tout $x \in D$, on a $|f_n(x)| \leq ||f_n||_\infty$. Comme le membre de droite est le terme général d'une série convergente, on déduit que la série numérique positive $\sum |f_n(x)|$ converge. Cela veut dire que la série numérique $\sum f_n(x)$ est absolument convergente dans le sens de la Definition 2.31, et donc que la série de fonctions $\sum f_n$ est absolument convergente dans le sens de la Definition 2.61.

Passons à la convergence $CVN \implies CVU$. Tout d'abord on pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_n\|_\infty$ le reste au rang n de la série numérique positive convergente $\sum \|f_n\|_\infty$. Comme $\sum \|f_n\|_\infty$ converge, la suite (R_n) converge vers 0. D'après le point précédent on sait que la série de functions $\sum f_n$ converge absolument donc simplement. Soit $x \in D$, et notons $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_n(x)$. Soit $p \geq n \geq 0$ et évaluons la norme infinie de la différence de la somme partielle $S_p(x)$ et de $S_n(x)$:

$$|S_p(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{p} f_n(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{p} |f_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{p} \|f_n\|_\infty \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_n\|_\infty = R_n$$

Comme on sait que $\sum f_n$ converge simplement vers la fonction somme $S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_n(x)$, on peut faire tendre p vers l'infini dans le membre de gauche pour avoir :

$$|S(x) - S_n(x)| \leq R_n$$

Comme l'inégalité est vraie pour tout $x \in D$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est vrai en particulier pour la borne supérieure :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|S - S_n\|_\infty \leq R_n$$

Comme le membre de droite tend vers 0, le membre de gauche est aussi petit que l'on veut, donc la série de fonction $\sum f_n$ est uniformément convergente. $\square$

Exemple 2.66. *Une série de fonctions simplement convergente mais pas absolument convergente.* Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x^2}$. D'après le critère des séries alternées, la série de fonctions est simplement convergente. Par contre elle n'est pas absolument convergente car $|f_n(x)| \sim \frac{1}{n}$ quand n tend vers l'infini, or $\frac{1}{n}$ est le terme principal de la série harmonique qui diverge. Par la Proposition 2.15 nous en déduisons que la série $\sum |f_n(x)|$ diverge pour tout $x \in \mathbb{R}$. La série de fonctions $\sum f_n$ ne peut donc pas être normalement convergente et cela se voit car

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \frac{1}{n}$$

Donc la série $\sum \|f_n\|_\infty$ est la série harmonique, qui diverge.

Exemple 2.67. *Une série de fonctions absolument et uniformément convergente mais pas normalement convergente.* Soit $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n(1+nx)}$ définie sur $]0, +\infty[$. Pour tout $x > 0$, on a que $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2 x}$ donc la série est absolument convergente sur $]0, +\infty[$ (théorème de comparaison) vers la somme $S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_n(x)$. Montrons que la série est uniformément convergente. Soit $x > 0$, on a alors $|S_n(x) - S(x)| = |R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(1+kx)}\right|$. La propriété des restes des séries alternées nous dit que le reste est majoré par le premier terme :

$$|R_n(x)| \leq \left|\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)(1+(n+1)x)}\right| \leq \frac{1}{n+1}$$

On peut donc majorer $||R_n||_\infty$ par une suite convergeant vers 0 donc la série de fonction est uniformément convergente.

Montrons que la série n'est pas normalement convergente sur les intervalles de type $]0, +\infty[$. Si jamais il existait une suite de nombres positifs u_n tels que $|f_n(x)| \leq u_n$ pour tout $x \in]0, +\infty]$, alors en passant à la limite $x \to 0$ dans l'inégalité, on a que $|f_n(x)|$ tend vers $1/n$ donc $1/n \geq u_n$ donc la série $\sum u_n$ diverge. Il n'existe pas de série convergente $\sum u_n$ telle que $|f_n(x)| \leq u_n$ pour $x > 0$. Plus simplement, la norme infinie de f_n est $1/n$ donc ne converge pas. Par contre, la convergence est normale sur tout intervalle semi-ouvert $[a, +\infty]$. Si $x \geq a$, alors $1 + nx \geq na$ donc $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2 a}$ sur l'intervalle $[a, +\infty[$. Comme la série $1/n^2 a$ est convergente, la série de fonctions f_n est normalement convergente sur $[a, +\infty[$.

Exemple 2.68. *Une série de fonctions uniformément convergente mais pas normalement convergente.* Soit $f_n(x) = \frac{(-x)^n}{n+x}$ définie sur $[0, 1]$. Alors la série de fonctions $\sum f_n$ est uniformément convergente mais pas normalement convergente (car $||f_n||_\infty = 1$ pour tout n). Soit $x \in [0, 1]$, alors $\sum f_n(x)$ est une série alternée satisfaisant le critère de Leibniz donc elle converge. La limite simple de la série de fonction est notée S. Le reste de la série $R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$ converge vers zero. La majoration du reste d'une série alternée satisfaisant le critère de Leibniz est donnée par :

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k+x}\right| \leq \left|\frac{(-x)^{n+1}}{n+1+x}\right| \leq \frac{1}{n+1}$$

Ceci étant vrai pour tout x, on a une majoration :

$$||S - S_n||_\infty \leq \frac{1}{n+1}$$

qui converge donc vers 0.

Remarque 2.69. Concrètement, pour montrer une convergence normale, 1. soit on calcule directement la suite $(\|f_n\|_\infty)_n$ et on regarde si la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty$ converge, mais ça peut être compliqué, 2. soit on majore chaque $\|f_n\|_\infty$ par un nombre positif a_n, qui est tel que la série numérique positive $\sum a_n$ est convergente, et ça on sait facilement le vérifier avec toutes les techniques qu'on possède.

Exemple 2.70. *Application de la convergence normale.* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^n}{n!}$. La série de fonctions des f_n converge simplement vers la fonction suivante :

$$\begin{array}{rccc} \exp : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \end{array}$$

Il se trouve que cette fonction est la fonction exponentielle $e : x \mapsto e^x$ (il faudrait le montrer) ! La série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur la droite réelle $\mathbb{R}$ car la suite de fonctions $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}$ (puisqu'aucune fonction f_n n'est bornée dès que $n \geq 1$). Par contre sur tout segment de centre 0 et de rayon $R > 0$, la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément. En effet, nous avons :

$$\forall\, x \in [-R, R] \qquad |f_n(x)| \leq \frac{R^n}{n!}$$

De cela, nous déduisons que $||f_n||_\infty \leq \frac{R^n}{n!}$ sur le segment $[-R, R]$. Le membre de droite de l'inégalité est le terme général d'une série numérique positive convergente : la série $\sum \frac{R^n}{n!}$ convergeant vers e^R. Par les résultats de comparaison des séries numériques positives de la Proposition 2.15, nous déduisons que la série numérique positive $\sum ||f_n||_\infty$ converge, c'est à dire que la série $\sum f_n$ converge *normalement* sur le segment $[-R, R]$. Par la proposition 2.65, elle converge donc uniformément sur ce segment vers la fonction somme qui est la fonction exponentielle. Plus généralement le raisonnement se vérifie sur tout segment de $\mathbb{R}$, pas seulement sur ceux centrés en l'origine.

Maintenant, soit $k \in \mathbb{N}$. La dérivée complexe k-ième de chaque fonction f_n est la fonction définie par $f_n^{(k)}(x) = \frac{x^{n-k}}{n!}$ pour tout $n \geq k$ et 0 si $0 \leq n < k$. Alors nous voyons que

$$\forall\, x \in [-R, R] \qquad |f_n^{(k)}(x)| \leq \frac{R^{n-k}}{(n-k)!}$$

De cela, nous déduisons que $||f_n^{(k)}||_\infty \leq \frac{R^{n-k}}{(n-k)!}$ sur le segment $[-R, R]$. Le membre de droite de l'inégalité est le terme général d'une série numérique positive convergente : la série $\sum \frac{R^{n-k}}{(n-k)!}$ convergeant vers e^R. Par le même raisonnement que ci dessus, nous déduisons que la série $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur le segment $[-R, R]$. Alors par la Proposition 2.57, nous avons que la fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad \exp^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} = \exp(x)$$

Comme ceci est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous déduisons que la fonction exponentielle complexe est infiniment dérivable et $\exp^{(k)} = \exp$.

Historiquement les séries de fonctions ont servi à fabriquer des fonctions continues et (presque) nulle part dérivables (et donc non dessinables) :

— La fonction de Weierstrass (1872). On se donne $a \in]0, 1[$ et $b \geq \frac{1}{a}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$W(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cos(b^n x)$$

La série de fonctions $\sum a^n \cos(b^n -)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ donc ça nous assure que la fonction somme W est continue. Hardy (1916) a montré que cette fonction W n'est dérivable nulle part sur $\mathbb{R}$.

— L'autre fonction de Riemann (1860). Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$R(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(n^2 x\right)}{n^2}$$

Riemann n'a jamais écrit cette fonction, elle vient d'élèves et de collaborateurs qui lui attribuent. Riemann pensait que la fonction est nulle part dérivable. En 1969 Gerver – un élève de Lang à Columbia – a prouvé que la fonction R n'est dérivable qu'aux points du type $x = \pi\frac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, $p \wedge q = 1$ et p, q impairs ! Par exemple R est dérivable en π (dur à montrer) mais n'est pas dérivable en 0 (facile à montrer).

Il se trouve que les fonctions continues nulle part dérivables forment l'immense majorité des fonctions qui existent. Si nous avons des difficultés à exhiber certaines de ces fonctions c'est que la plupart de ces fonctions ne sont pas écrivables. Nous comprenons que ce que nous étudions en analyse à travers les fonctions usuelles continues dérivables, c'est une infime partie – et l'exception – dans le monde général des fonctions.

2.4 Convergence et somme d'une série entière

Les résultats donnés sur les suites et les séries de fonctions réelles sont aussi valables sur les complexes (excepté les comparaisons d'ordre). En général dans $\mathbb{R}$ on note x la variable des fonctions réelles, dans $\mathbb{C}$ on note z la variables des fonctions complexes. Les fonctions complexes sont plus compliquées à étudier que les fonctions réelles, et seront étudiées plus tard. Par contre un cas particulier de fonctions sur le plan complexe qui sont plus simples à analyser sont les polynomes en z. Un monôme complexe est une fonction de type $a_n z^n$, où $a_n \in \mathbb{C}$, pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Un polynôme de la variable complexe est une somme *finie* de monômes. C'est toujours une fonction complexe bien définie sur tout le plan complexe. Maintenant, avec le savoir accumulé sur les séries de fonctions on aimerait étendre la notion de polynômes – sommes finies de monômes – à des sommes infinies de monômes – des séries de fonctions monomiales. On va donc étudier dans la droite réelle et le plan complexe les suites de fonctions $(f_n)_n$ du type (ici D est un domaine – c'est à dire sous-ensemble – du plan complexe) :

$$\begin{aligned} f_n : \quad D \subset \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto a_n z^n \end{aligned}$$

et leurs séries de fonctions associées, c'est à dire de la forme

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

où la variable z est un nombre complexe, et où $(a_n)_n$ est une suite de nombres complexes qu'on appelle "coefficients". Pour le cas réel, D est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, $(a_n)_n$ est une suite de nombres réels, et le monôme est du type $a_n x^n$. Ces séries de fonctions sont particulièrement adaptées à la notion de convergence normale.

Définition 2.71. *On appelle* série entière *toute série de fonctions du type* $\sum a_n z^n$ *(resp.* $\sum a_n x^n$*), où* $(a_n)_n$ *est une suite complexe (resp. réelle).*

Remarque 2.72. Une série entière ne converge simplement pas nécessairement partout. Du fait que les séries entières sont des suites de fonctions polynomiales, nous verrons plus bas que la convergence se fait sur un disque de convergence centré en l'origine du plan complexe.

Les fonctions $f_n : z \mapsto a_n z^n$ sont des cas particuliers de fonctions, ce sont des monômes. Une question évidente qui vient à l'esprit est donc *à quelle condition (sur la suite $(a_n)_n$) la série de fonctions $\sum a_n z^n$ converge-t-elle ? (absolument, uniformément, normalement ?)* vers une fonction somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$? Inversement, on peut se poser la question *quelles sont les fonctions sur $\mathbb{C}$ "développables en série entière", c'est à dire qui peuvent s'écrire comme une somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ pour une suite $(a_n)_n$ à déterminer ?* Une reformulation de ces questions se trouve en observant les sommes partielles des séries entières :

$$\begin{aligned} &S_0(z) = a_0, \quad S_1(z) = a_0 + a_1 z, \quad S_2(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2, \quad \text{etc.} \\ &S_n(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n \end{aligned}$$

Ce sont des polynômes. Cela pose donc la question suivante : *quelles sont les fonctions continues qu'on peut approcher (uniformément) avec des polynômes ?*

Exemple 2.73. La série géométrique $\sum z^n$ est une série entière, où tous les coefficients a_n valent 1. On suppose que $z \neq 1$ car pour $z = 1$ la série diverge grossièrement vers l'infini. Pour $z \neq 1$, la fonction somme partielle de rang n de cette série est :

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

La suite des sommes partielles $(S_n(z))_n$ ne convergent que si la suite $(z^n)_n$ converge vers 0. Cela n'est possible que si $|z| < 1$, c'est à dire si z est sur le disque ouvert de rayon 1. Si tel est le cas, la limite de la suite $(S_n(z))_n$ est $\frac{1}{1-z}$. Autrement dit on approche la fonction $\frac{1}{1-z}$ par des polynômes de degré de plus en plus élevé. Si $|z| > 1$, la suite des sommes partielles tend vers l'infini, tandis que si $|z| = 1$, elle diverge (oscille) mais nous verrons plus tard (dans l'exemple 2.82) ce qu'il se passe en détail.

Exemple 2.74. Un autre exemple de série entière qui est égale à une fonction dans un domaine donné est la fonction exponentielle complexe. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ posons $a_n = \frac{1}{n!}$, alors la série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge vers la fonction exponentielle complexe :

$$\begin{aligned} \exp : \ \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \end{aligned}$$

Elle coincide avec la fonction exponentielle traditionnelle lorsqu'on se restreint à l'axe des réels. La définition avec la série entière est une façon d'étendre la fonction exponentielle traditionnelle au plan complexe. Sans cela, c'est compliqué de trouver une définition.

Soit $(a_n)_n$ une suite complexe et soit $\sum a_n z^n$ la série entière associée. Rappelons que la série entière $\sum a_n z^n$ est absolument convergente sur un domaine $D \subset \mathbb{C}$ donné si et seulement si la série numérique positive $\sum |a_n||z|^n$ converge pour tout $z \in D$. Pour déterminer ce domaine de convergence D, nous nous reposons sur le résultat suivant :

Proposition 2.75. Lemme d'Abel. *S'il existe $r > 0$ tel que la suite réelle positive $\left(|a_n| r^n\right)_n$ est bornée, alors la série entière $\sum a_n z^n$ est absolument convergente sur le disque ouvert de centre l'origine et de rayon r, c'est à dire si $|z| < r$.*

Démonstration. Soit $r > 0$ satisfaisant la condition du Lemme d'Abel. Soit donc $M > 0$ tel que $0 \leq |a_n| r^n \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si $z \in B(0, r)$, c'est à dire tel que $|z| < r$. Alors on a :

$$|a_n z^n| = |a_n| r^n \frac{|z|^n}{r^n} \leq M \left(\frac{|z|}{r}\right)^n$$

Le terme $\frac{|z|}{r}$ est strictement inférieur à 1, donc la série géométrique positive $\sum\left(\frac{|z|}{r}\right)^n$ converge. Par le théorème de comparaison 2.15, la série numérique positive $\sum|a_nz^n|$ converge. $\square$

Définition 2.76. *Soit I l'ensemble des nombres réels $r \geq 0$ (positifs ou nuls) tels que la suite réelle positive $\left(|a_n|r^n\right)_n$ est bornée. Si l'ensemble I est majoré, il admet une borne supérieure, appelée* rayon de convergence *de la série $\sum a_nz^n$ et notée R, autrement dit :*

$$R = \sup\{r \geq 0 \text{ tel que la suite } \left(|a_n|r^n\right)_n \text{ est bornée}\}$$

Si l'ensemble I n'est pas majoré, alors on dit que le rayon de convergence de la série est infini, et on note $R = +\infty$.

Remarque 2.77. Notons tout d'abord que l'ensemble I contient $0 \in \mathbb{R}$. D'autre part, s'il n'est pas réduit à 0, cet ensemble est en réalité un intervalle (il est convexe). En effet : soit $r \in I$ strictement positif, alors pour tout t tel que $0 \leq t \leq r$, on a $0 \leq |a_n|t^n \leq |a_n|r^n$. Comme la suite $\left(|a_n|r^n\right)_n$ est bornée, de même en est-il pour la suite $\left(|a_n|t^n\right)_n$. Donc $t \in I$. Ceci étant vrai pour tout $0 \leq t \leq r$, nous en déduisons que $[0, r] \subset I$.

Exemple 2.78.
- La série de fonctions $\sum \frac{z^n}{n}$, est une série entière. Elle ne converge absolument que si $|z| < 1$ car la convergence de la suite géométrique $(|z|^n)_n$ vers 0 est plus rapide que la divergence de la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ vers $+\infty$. Le rayon de convergence est donc $R = 1$.
- La série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est une série entière absolument convergente partout, et sa limite est $\exp(z)$. Le rayon de convergence est donc $R = +\infty$.
- Un example qui lui est opposé est la série entière $\sum n!z^n$. Elle ne converge que pour $z = 0$, car si $z \neq 0$, $\ln(n!z^n) = n\ln(z) + \ln(n!)$ qui tend vers $+\infty$ quel que soit z donc la série entière diverge grossièrement. Dans ce cas le rayon de convergence est $R = 0$.

Exemple 2.79. Caractérisons un peu plus les séries entières qui ont rayon de convergence infini. Soit $\sum a_nz^n$ une série entière ayant pour rayon de convergence $R = +\infty$. Alors, pour tout $r > 0$, on que la suite $\left(|a_n|r^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée c'est à dire qu'il existe M_r tel que $|a_n| \leq \frac{M_r}{r^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier, les coefficient $|a_n|$ tendent vers 0 très rapidement (plus vite que n'importe quelle exponentielle).

Proposition 2.80. *Soit $(a_n)_n$ une suite complexe, soit $\sum a_nz^n$ la série entière associée et soit R son rayon de convergence qu'on suppose non-nul.Alors :*

1. *la série de fonctions $\sum a_nz^n$ est absolument convergente sur la boule ouverte $B(0, R)$;*
2. *la série complexe $\sum a_nz^n$ est grossièrement divergente pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$.*

Démonstration. Pour le premier point, soit $z \in B(0, R)$ (la boule ouverte de rayon R). Comme la boule est ouverte, il existe $r > 0$ tel que $|z| < r < R$. Comme $\left(|a_n|r^n\right)_n$ est bornée, le Lemme d'Abel nous dit que la série numérique positive $\sum|a_nz^n|$ converge. Pour le deuxième point, si jamais $z \in \mathbb{C}$ est tel que $|z| > R$, alors il existe $r > 0$ tel que $R < r < |z|$. On a donc :

$$|a_nz^n| = |a_n|r^n\frac{|z|^n}{r^n} \geq |a_n|r^n$$

Par définition du rayon de convergence, la suite $\left(|a_n|r^n\right)_n$ n'est pas bornée, donc la suite $\left(|a_nz^n|\right)_n$ ne tend pas vers 0 donc la série complexe $\sum a_nz^n$ diverge grossièrement. $\square$

On a donc un moyen de calculer un rayon de convergence : si on a trouvé un nombre réel strictement positif $R > 0$ tel que la suite $\left(|a_n|r^n\right)_n$ est bornée pour tout $0 \leq r < R$, et diverge pour tout $r > R$, alors R est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_nz^n$. Les deux cas extrêmes $R = 0$ et $R = +\infty$ sont atteint lorsque :

— pour $R=0$: si la suite $\left(|a_n|r^n\right)_n$ n'est jamais bornée dès que $r>0$, et

— pour $R=+\infty$: si la suite $\left(|a_n|r^n\right)_n$ est toujours bornée quel que soit $r>0$.

Le choix du nom "rayon de convergence" n'est pas anodin, comme le justifie la Définition suivante :

Définition 2.81. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et R son rayon de convergence qu'on suppose non-nul. La boule ouverte $B(0,R)$ de centre 0 et de rayon R est appelée* disque de convergence *de la série. Le cercle frontière $\partial B(0,R)$ (qui n'existe que lorsque R est fini) est appelé* cercle d'incertitude*.*

Nous ne le préciserons pas à chaque fois, mais tous les résultats sur le disque de convergence d'un rayon de convergence fini non-nul s'appliquent aussi au cas du rayon de convergence infini (qui est aussi non-nul) car la boule ouverte de centre 0 et de rayon infini est le plan complexe tout entier. Pour un rayon de convergence fini, la série entière converge absolument sur le disque de convergence et diverge grossièrement à l'extérieur. Sur le cercle d'incertitude, c'est au cas par cas : selon la série entière, on peut avoir convergence absolue, convergence simple ou divergence.

Exemple 2.82. Dans l'exemple 2.73 nous avons vu que la série entière $\sum z^n$ ne converge absolument que pour $|z|<1$. Elle admet donc comme rayon de convergence $R=1$. Sur le cercle unité, la série $\sum z^n$ diverge grossièrement en $z=1$, et est une série alternée qui diverge en $z=-1$. En tout autre point $z=e^{i\alpha 2\pi}$ pour $\alpha\in]0,1[$ on a pour somme partielle :

$$S_n=\sum_{k=0}^{n} e^{ik\alpha 2\pi}=\frac{1-e^{i(n+1)\alpha 2\pi}}{1-e^{i\alpha 2\pi}}=(1-r)q^n+r$$

C'est une suite arithmético-géométrique, de paramètres $r=\frac{1}{1-e^{i\alpha 2\pi}}$ et $q=e^{i\alpha 2\pi}$. Donc on voit que lorsque n augmente, l'exponentielle complexe $n\mapsto e^{in\alpha 2\pi}$ tourne, donc la somme partielle n'a pas de limite.

On peut même être plus précis : si $\alpha\in\mathbb{Q}$ alors l'exponentielle complexe est périodique $e^{ik\alpha 2\pi}$ et la suite des sommes partielles est une suite périodique (et ne peut pas converger). Par contre si $\alpha\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ est irrationnel, alors la suite des sommes partielles n'es pas périodique mais oscille, au point d'être *dense* dans le cercle de centre $r=\frac{1}{1-e^{i\alpha 2\pi}}$ et de rayon $|1-r|=|r|$.

Pour cet exemple le rayon de convergence est $R=1$, mais plus généralement, soit $a\in\mathbb{C}^*$, alors la série entière $\sum a^n z^n$ admet pour rayon de convergence $R=\frac{1}{|a|}$.

Les critères de convergence de Cauchy et de d'Alembert s'appliquent aux séries entières et de grande utilité :

Proposition 2.83. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Nous avons deux résultats :*

1. **d'Alembert** *Si pour tout n assez grand, on a $a_n\in\mathbb{C}^*$, et si :*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\xrightarrow[n\to+\infty]{}L\in\mathbb{R}_+\cup\{+\infty\}$$

alors le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est $R=\frac{1}{L}$ (où, par convention, $\frac{1}{0}=+\infty$ et $\frac{1}{+\infty}=0$).

2. **Cauchy** *Si la suite $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)_n$ admet une limite $L\in\mathbb{R}_+\cup\{+\infty\}$, alors le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ est $R=\frac{1}{L}$.*

Remarque 2.84. Si le critère de d'Alembert fonctionne, alors celui de Cauchy aussi, avec la même limite, donc le même rayon de convergence (ce qui est rassurant). Le critère de Cauchy est donc plus général mais celui de d'Alembert souvent plus utile.

Exemple 2.85. La série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge vers la fonction exponentielle complexe sur tout le plan complexe. On peut voir facilement que son rayon de convergence est infini car $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1}$, qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Exemple 2.86. Calculons le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{n!}{n^n} z^n$. Appliquons le critère de d'Alembert, avec la suite positive $(a_n)_n$ de terme général $a_n = \frac{n!}{n^n}$. On a donc :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{e}$$

Par d'Alembert, comme la limite de la suite $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_n$ est $L = \frac{1}{e}$, le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{n!}{n^n} z^n$ est $R = e$. Attention, la série entière ne converge pas sur tout le cercle d'incertitude. En $z = e$ par exemple, nous avons que $a_n e^n = \frac{n!}{n^n} e^n = e^{\ln(n!)+n-n\ln(n)}$. Or on connait l'équivalent de $ln(n!)$ en $+\infty$:

$$\ln(n!) = n\ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(n) + O(1)$$

Donc $a_n e^n = e^{\frac{1}{2}\ln(n)+O(1)} \sim \sqrt{n}$ donc la suite $(a_n e^n)_n$ n'est pas bornée, donc la série $\sum \frac{n!}{n^n} e^n$ diverge grossièrement.

Exemple 2.87. La série entière $\sum \binom{2n}{n} z^n$ admet comme rayon de convergence $\frac{1}{4}$.

Remarque 2.88. Attention, on peut bien entendu admettre un rayon de convergence tout en ne satisfaisant pas le critère de d'Alembert ou Cauchy. Par exemple la série entière $\sum \sin(n) z^n$ admet pour rayon de convergence 1 mais $\left|\frac{\sin(n+1)}{\sin(n)}\right|$ n'admet pas de limite.

Proposition 2.89. *Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence R_a et R_b, respectivement.*

- *Si pour tout n assez grand, on a $|a_n| \leq |b_n|$, alors on a $R_b \leq R_a$;*
- *Si $|a_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |b_n|$, alors $R_a = R_b$.*

Démonstration. C'est un corollaire de la Proposition 2.15. Soit $0 \leq r < R_b$, alors on a que la suite $(b_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Par la majoration $|a_n| \leq |b_n|$, la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi bornée, et donc $r \leq R_a$. On a donc la phrase logique suivante : $\forall\, 0 \leq r < R_b,\ r \leq R_a$. On en déduit que $R_b \leq R_a$. Pour le deuxième point, c'est une application directe du dernier point de la Proposition 2.15. □

Exemple 2.90. Soit la série entière $\sum \frac{z^n}{n}$. Le critère de d'Alembert nous donne $L = 1$ donc le rayon de convergence est $R = 1$. En effet, pour tout z de module $|z| < 1$, la puissance l'emporte sur le dénominateur et la série converge absolument. Pour tout z de module $|z| > 1$, la série diverge grossièrement donc le rayon de convergence est 1. Etudions ce qu'il se passe sur le cercle d'incertitude. Pour $z = 1$ la série entière est la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ qui diverge. Pour $z = -1$, la série entière est la série alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ qui satisfait le critère de Leibniz 2.38 donc converge.

Aussi pour $z = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ car on peut scinder la série en deux séries alternées :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{4n} \frac{i^k}{k} &= \frac{i}{1} + \frac{-1}{2} + \frac{-i}{3} + \frac{1}{4} + \frac{i}{5} + \frac{-1}{6} + \frac{-i}{7} + \frac{1}{8} + \frac{i}{9} + \ldots + \frac{1}{4n} \\ &= \sum_{p=1}^{2n} \frac{(-1)^p}{2p} + i \sum_{p=0}^{2n-1} \frac{(-1)^p}{2p+1}\end{aligned}$$

Les deux séries sur la droite sont alternées qui satisfont le critère de Leibniz 2.38 donc convergent, ce qui fait que la série entière $\sum \frac{z^n}{n}$ converge en $z = i$.

Pour $z = j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, nous avons $j^2 = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ et $j^3 = 1$; on dit que j est une *racine troisième de l'unité*. Dans ce cas la somme partielle au rang $3n$ vaut :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{3n} \frac{j^k}{k} &= \frac{j}{1} + \frac{j^2}{2} + \frac{1}{3} + \frac{j}{4} + \frac{j^2}{5} + \frac{1}{6} + \frac{j}{7} + \frac{j^2}{8} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{3n} \\ &= j \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{3p-2} + j^2 \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{3p-1} + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{3p}\end{aligned}$$

Or nous savons que $\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{3p} = \frac{1}{3} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3}\ln(n)$. Cet équivalent s'applique aussi aux autres sommes ci-dessus (par comparaison série intégrale). Donc on a l'intuition que la somme partielle de rang $3n$ se comporte comme un produit $\frac{j+j^2+1}{3}\ln(n)$. Le numérateur de la fraction est nul (propriété des racines 3-èmes de l'unité, qu'on peut voir sur un dessin du plan complexe) mais le logarithme tend vers $+\infty$ donc nous avons une forme indéterminée. D'autre part les sommes partielles de rang $3n+1$ et $3n+2$ valent $\frac{1}{3n+1} + \sum_{k=1}^{3n} \frac{j^k}{k}$ et $\frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} + \sum_{k=1}^{3n} \frac{j^k}{k}$, respectivement. Donc si la somme partielle de rang $3n$ converge quand n tend vers l'infini, les autres sommes partielles convergent. La proposition suivante nous dit que c'est le cas.

Theorème de Picard. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ fini. Si la suite $(a_n)_n$ est positive, décroissante et converge vers 0, alors la série entière converge simplement sur tout le cercle d'incertitude, à l'exception éventuellement du point $z = R$.*

Démonstration. Nous pouvons prendre le cas où $R = 1$ car le cas général se ramène à ce cas particulier. Nous ne donnerons pas de preuve formelle du résultat mais l'idée intuitive de la preuve c'est que dès que z est sur le cercle d'incertitude, mais différent du point $z = 1$, on a que $z = e^{i\theta}$ pour un certain $\theta \in]0, 2\pi[$. Les puissances successives sont donc $z^n = e^{in\theta}$ et elles tournent sur le cercle d'incertitude. Pour cette raison la série entière $\sum z^n$ ne converge pas (oscille) dès que $z \neq 1$, tandis qu'elle tend vers $+\infty$ si $z = 1$. Maintenant, si on a une suite réelle $(a_n)_n$ positive décroissante convergeant vers 0, on peut comprendre que la série $\sum a_n z^n$ oscille mais avec de moins en moins d'amplitude contrairement à la suite $\sum z^n$ qui oscille sans perdre en amplitude. $\square$

Remarque 2.91. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière (dont les coefficients ne satisfont pas forcément les hypothèses du Théorème de Picard). Notons $\mathscr{C}$ l'ensemble des points z du cercle d'incertitude tels que la série entière $\sum a_n z^n$ converge simplement. On peut montrer que $\mathscr{C}$ est nécessairement une intersection dénombrable d'unions dénombrables de fermés, ce qu'on appelle un ensemble de type $F_{\sigma\delta}$. Inversement, étant donné un sous-ensemble $\mathscr{C}$ de type $F_{\sigma\delta}$ du cercle d'incertitude, peut-on trouver une série entière qui converge simplement exactement sur $\mathscr{C}$? On a pu le montrer si $\mathscr{C}$ est un nombre fini mais dans toute sa généralité cette question reste encore ouverte.

Les séries entières sont avant tout des séries de fonctions. Nous nous intéressons donc à si leur fonction somme est continue, dérivable ou intégrable. Ces propriétés sont induites par la convergence uniforme de séries de fonctions. Il faut donc s'intéresser à ce genre de convergence pour les séries entières. Etant donnée une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R, nous savons qu'elle converge absolument sur son disque de convergence, et diverge grossièrement en dehors. La fonction somme n'est donc définie a priori que sur le disque de convergence :

$$\begin{aligned} S: \quad B(0,R) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \end{aligned}$$

La question est donc de savoir si la fonction somme S est-elle continue, dérivable, intégrable ? ?

Nous avons un problème, car si jamais la série entière $\sum a_n z^n$ convergeait uniformément sur la boule ouverte de rayon R, alors elle convergerait sur la boule fermée de rayon R (cela se montre en étudiant la suite des sommes partielles). Mais cela voudrait dire qu'elle convergerait simplement en tout point du cercle d'incertitude. Or ce n'est certainement pas toujours le cas, puisque la convergence de la série entière sur le cercle d'incertitude se fait en les points de l'ensemble $\mathscr{C}$, qui est très souvent un sous-ensemble strict du cercle d'incertitude. De ce fait, nous voyons donc qu'en général la série entière ne peut *pas* converger uniformément sur le disque de convergence en entier. Par contre, comme pour les suites de fonctions réelles qui peuvent ne pas converger uniformément sur des intervalles ouverts, mais peuvent le faire sur tout segment inclus, nous allons voir que les séries entières peuvent converger uniformément sur certains domaines du disque de convergence qui généralisent la notion de segment dans le plan complexe (et plus généralement les ensembles finis en topologie).

Définition 2.92. *Un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est dit :*

— fermé *si tout suite convergente d'éléments de D converge dans D, i.e. sa limite est dans D,*
— ouvert *si son complémentaire D^c est fermé,*
— borné *s'il existe $M > 0$ tel que $\forall z \in D$, on a $|z| < M$,*
— compact *si D est fermé borné.*

Remarque 2.93. Attention, la définition des compacts comme les ensembles fermés bornés n'est valable que dans les espaces vectoriels de dimension finie. La définition générale d'un ensemble compact est une définition topologique plus compliquée qu'on verra en troisième année. On peut montrer qu'un ensemble compact (dans le sens topologique) est fermé borné, et en dimension finie, tout ensemble fermé borné est compact, mais ce dernier résultat n'est pas forcément vrai en dimension infinie.

Exemple 2.94. Dans $\mathbb{R}$, les points, les unions finies de points, les segments et les unions finies de segments sont des fermés, et donc des compacts car tous ces ensembles sont bornés (car les unions sont finies). Une union infinie (dénombrable) de points ou de segments n'est pas forcément fermée : par exemple $\mathbb{Q}$ ou $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}[0, 1 - \frac{1}{n}] = [0, 1[$. L'ensemble $A = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ n'est pas fermé mais si on rajoute l'origine 0, l'adhérence $\overline{A} = A \cup \{0\}$ est fermée.

Exemple 2.95. Dans $\mathbb{C}$, la boule ouverte $B(0, R) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < R\}$ est ouverte et la boule fermée $\overline{B}(0, R) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \leq R\}$ est fermée. Les segments du plan complexe sont aussi fermé, car ils sont caractérisés par leur convexité et fermés aux extrémités comme dans $\mathbb{R}$:

$$[z_0, z_1] = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \exists\, t \in [0, 1] \text{ tel que } z = tz_1 + (1 - t)z_0\}$$

Exemple 2.96. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Son graphe est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ défini par :

$$\mathrm{Gr}(f) = \{z = x + if(x),\, x \in \mathbb{R}\}$$

Alors on a la résultat suivant : f est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\mathrm{Gr}(f)$ est fermé.

Remarque 2.97. La notion de compacité est en réalité sous-jacente à beaucoup de résultats profonds qu'on a déjà vus. On dit qu'un sous-ensemble A d'un espace vectoriel normé est *séquentiellement compact* si il possède la propriété que toute suite d'éléments de A possède une valeur (en fait vecteur) d'adhérence. Grâce à cela on peut reformuler de façon concise le théorème de Bolzano-Weierstrass en le généralisant aux espaces vectoriels normés de dimension finie :

Théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}^n$. *Dans un espace vectoriel de dimension finie, tout compact est séquentiellement compact.*

De là nous déroulons les résultats sur la convergence uniforme en commençant avec le résultat suivant qui traduit l'idée qu'une suite de fonctions peut ne pas converger uniformément sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$, tout en convergeant uniformément sur tout segment I :

Proposition 2.98. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et R son rayon de convergence qu'on suppose non-nul. La série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout compact inclus dans le disque de convergence, c'est à dire (de façon équivalente) dans tout disque fermé $\overline{B}(0, r)$, où $0 \leq r < R$.*

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(z) = a_n z^n$. La série entière $\sum a_n z^n$ est donc vue comme une série de fonctions $\sum f_n$. Converger normalement ici veut dire que la série numérique $\sum ||f_n||_\infty$ des normes infinies des fonctions f_n converge. Montrons que cela est vrai sur toute boule fermée $\overline{B}(0, r)$ de centre 0 et de rayon $0 \leq r < R$, car tout compact du disque de convergence – étant fermé – est inclus dans une boule fermée. Soit donc $0 \leq r < R$, alors par définition la série $\sum |a_n| r^n$ converge. Donc pour tout $z \in \overline{B}(0, r)$, on a $|a_n z^n| \leq |a_n| r^n$, donc c'est encore vrai pour la borne supérieure, c'est à dire qu'on a $||f_n||_\infty \leq |a_n| r^n$. Comme le membre de droite est celui d'une série convergente, celui de gauche est aussi celui d'une série convergente, par le théorème de comparaison 2.15.. □

La proposition ci-dessus nous permet d'appliquer directement les résultats de continuité, dérivation et intégration vus sur les séries de fonctions qui convergent uniformément. Pour la dérivation et l'intégration des séries entières, on ne connait pas la dérivation et l'intégration sur la variable complexe en toute généralité, mais la dérivation et l'intégration des polynômes se fait de la même façon que dans le cas réel, c'est à dire en diminuant l'exposant ou en l'augmentant. On a donc les résultats suivants qui sont immédiats :

Corollaire 2.99. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et R son rayon de convergence qu'on suppose non-nul. On note $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ la fonction somme. Alors nous avons les trois résultats suivants sur le disque de convergence :*

- *S est continue ;*
- *S est dérivable et $S'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} z^n$;*
- *S est intégrable et la primitive de S s'annulant en zéro est $T(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$.*

Démonstration. La série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout disque fermé $\overline{B}(0, r)$ pour tout $0 \leq r < R$, donc elle converge uniformément sur ce compact. De là, étant donné que toutes les fonctions $f_n : z \mapsto a_n z^n$ sont continues et de dérivées continues, nous pouvons appliquer tous les théorèmes vus pour les séries de fonctions, comme les Propositions 2.52, 2.56 et 2.57, ce qui conclut la preuve. □

Définition 2.100. *On appelle $\sum (n+1) a_{n+1} z^n$ la* série dérivée *et $\sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ la* série primitive *de la série entière $\sum a_n z^n$.*

Proposition 2.101. *Les séries dérivées et séries primitives ont même rayon de convergence que la série entière $\sum a_n z^n$.*

Démonstration. Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$, qu'on suppose non-nul (c'est à dire fini supérieur à zéro ou infini). Soit R_d le rayon de convergence de la série dérivée et R_p le rayon de convergence de la série primitive. Soit $z \in B(0, R)$, c'est à dire $|z| < R$. Soit donc $r > 0$ tel que $|z| < r < R$. La série numérique de terme général $a_n r^n$ est absolument convergente et on a :

$$\left| n a_n z^{n-1} \right| = \frac{n}{r} \frac{|z|^{n-1}}{r^{n-1}} |a_n| r^n$$

Mais comme $0 \leq \frac{|z|}{r} < 1$ on a que la suite $\left(\frac{n}{r}\frac{|z|^{n-1}}{r^{n-1}}\right)$ converge vers 0, c'est à dire qu'elle est inférieure à 1, à partir d'un certain rang. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a l'encadrement :

$$0 \leq \left|na_n z^{n-1}\right| \leq |a_n| r^n$$

Par le théorème de comparaison des séries de termes positifs, on en déduit que la série entière $\sum na_n z^{n-1}$ converge absolument, c'est à dire la série entière $\sum(n+1)a_{n+1}z^{n+1}$ converge absolument. Comme ce raisonnement est valide pour tout $z \in B(0,R)$, on déduit que $R \leq R_d$.

Inversement, soit $z \in B(0,R_d)$, alors on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|a_n z^n| \leq n\left|a_n z^{n-1}\right||z|$$

La série numérique de terme général $na_n z^{n-1}$ étant absolument convergente sur $B(0,R_d)$, alors on déduit que la série numérique de terme général $a_n z^n$ est absolument convergente. Comme ce raisonnement est valide pour tout $z \in B(0,R_d)$, on déduit que $R_d \leq R$. Donc $R = R_d$.

Pour finir, la série $\sum a_n z^n$ étant la série dérivée de $\sum \frac{a_{n-1}}{n} z^n$, on déduit que $R_p = R$. □

Remarque 2.102. Grâce au Corollaire 2.99 et à la Proposition 2.101 nous avons que toute série entière $\sum a_n z^n$ est dérivable à tout ordre sur le disque de convergence. Le coefficient a_n au rang n peut être obtenu en dérivant n fois la fonction somme $S : z \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$ et en évaluant $S^{(n)}$ en zéro. Plus précisément, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons :

$$S^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k!}{(k-n+1)!} a_k z^{k-n} = n!\,a_n + (n+1)!\,a_{n+1}z + \frac{(n+2)!}{2}a_{n+2}z^2 + \dots$$

Nous voyons qu'en $z = 0$, nous avons $S^{(n)}(0) = n!\,a_n$, autrement dit nous arrivons à la conclusion que les coefficients de la série entière $\sum a_n z^n$ sont reliés aux dérivées successives de la fonction somme S comme :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$$

Cette règle est à la base des séries de Taylor, et va être étudiée en profondeur dans la section suivante.

Exemple 2.103. Dans l'Exemple 2.39 nous avons dit que la série alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge vers $-\ln(2)$ grâce à une comparaison série-intégrale. Nous pouvons arriver à ce résultat plus facilement en voyant la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ comme la série primitive de la série entière $\sum z^n$, évaluée en $z = -1$. La série entière $\sum z^n$ admet pour rayon de convergence $R = 1$ et donc comme primitive sur le disque de convergence :

$$T(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$$

La série primitive de la série entière $\sum z^n$ est donc la série entière $\sum \frac{z^n}{n}$. Mais nous savons d'autre part par l'Exemple 2.73 que la série entière $\sum z^n$ est la série géométrique, qui converge normalement vers la fonction somme $S(z) = \frac{1}{1-z}$ sur le disque de convergence. Par la Proposition 2.56, nous nous attendons donc à avoir lune égalité du type :

$$T(z) = \int_0^z S \tag{2.3}$$

Malheureusement nous ne savons pas intégrer sur le plan complexe encore. Pour être rigoureux, restreignons nous à intégrer le long de segment du type $[0,z]$, où $z \in B(0,R)$ (voir la définition d'un segment complexe dans l'Exemple 2.95). Nous utilisons le Lemme suivant :

Lemme 2.104. *Si une série entière* $\sum a_n z^n$ *converge en un point* z_0 *du cercle d'incertitude alors la convergence est uniforme sur le segment* $[0, z_0]$*. En particulier, la fonction :*

$$\begin{aligned} \sigma : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (t z_0)^n \end{aligned}$$

est une fonction continue, dérivable et intégrable sur le segment $[0, 1]$*.*

Remarque 2.105. Une autre façon de le dire, c'est que la fonction somme $S : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, qui est continue sur le disque de convergence, satisfait la limite suivante :

$$\lim_{\substack{t \to 1 \\ t<1}} S(tz_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z_0)^n$$

Autrement dit, la fonction somme est continue au point z_0, mais uniquement selon le rayon.

Exemple 2.106. Reprenons les données de l'Exemple 2.103. La série primitive $\sum \frac{z^n}{n}$ de la série entière $\sum z^n$ converge (par le Théorème de Picard) sur tous les points du cercle d'incertitude sauf au point $z = 1$. Soit donc $z \neq 1$ un point du cercle d'incertitude. Ce nombre complexe peut s'écrire $z = e^{i\theta}$ pour un certain $\theta \in]0, 2\pi[$. D'après le Lemme 2.104, nous avons que la fonction :

$$\begin{aligned} \sigma_\theta : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{n} t^n \end{aligned}$$

est une fonction continue et dérivable sur le segment $[0, 1]$. Nous observons que pour tout $t \in [0, 1[$, $\sigma_\theta(t) = T(te^{i\theta})$. Comme T est la primitive s'annulant en 0 de la fonction somme $S : z \mapsto \frac{1}{1-z}$, la fonction σ_θ est donc la primitive de la fonction :

$$\begin{aligned} S_\theta : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto \frac{1}{1 - te^{i\theta}} \end{aligned}$$

Pour tout $t \in [0, 1[$, on pourrait intégrer la fonction S_θ et faire sens rigoureux de l'égalité (2.3) :

$$\forall t \in [0,1[\qquad \sigma_\theta(t) = \int_0^t S_\theta(s) ds = -\ln(1 - te^{i\theta}) \tag{2.4}$$

Malheureusement nous n'avons pas encore défini le logarithme complexe donc cette formule, bien que juste, ne nous aide pas.

Dans la suite, on pose $\theta = \pi$, c'est à dire $z = e^{i\pi} = -1$. Dans ce cas, la fonction primitive est donnée par :

$$\sigma_\pi(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-t)^n}{n}$$

L'égalité (2.4) a maintenant un sens que l'on connait :

$$\forall t \in [0,1[\qquad \sigma_\pi(t) = \int_0^t S_\pi(s) ds = -\ln(1 + t) \tag{2.5}$$

D'après le Lemme 2.104, la fonction σ_π est continue en $t = 1$. D'autre part la fonction $t \mapsto -\ln(1+t)$ est aussi continue en $t = 1$, l'égalité (2.5) est donc aussi valide en $t = 1$, et nous avons donc :

$$\sigma_\pi(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$$

Ceci est le bon résultat. Pour résumer, nous avons :

$$\forall x \in [-1,1[\qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$$

C'est un exemple de développement en série entière que nous allons approfondir dans la section suivante.

Nous finissons cette section avec quelques informations utiles basées sur le Lemme 2.104.

Définition 2.107. *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que la série numérique $\sum a_n$ est* Abel-convergente *si la limite suivante existe et est finie :*

$$\lim_{\substack{t\to 1\\ t<1}} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$$

Le Lemme 2.104 prouve qu'une série numérique convergente dans le sens usuel est Abel-convergente. Par contre il existe des séries Abel-convergentes qui ne sont pas convergentes dans le sens usuel. Par exemple la série $\sum(-1)^n$ est Abel-convergente mais pas convergente dans le sens usuel. En effet, la série entière $\sum(-1)^n t^n$ de rayon de convergence $R=1$ est la série géométrique de paramètre $-t$, qui admet donc comme fonction somme $S(t) = \frac{1}{1+t}$, pour tout $t \in]-1,1[$. On a la limite suivante :

$$\lim_{\substack{t\to 1\\ t<1}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n = \lim_{\substack{t\to 1\\ t<1}} \frac{1}{1+t} = \frac{1}{2}$$

La série $\sum(-1)^n$ est donc bien Abel-convergente, avec limite $\frac{1}{2}$, mais elle n'est pas convergente au sens usuel. Le convergence usuelle est donc une condition plus forte que l'Abel-convergence.

2.5 Développement d'une fonction en séries entières

Dans cette section, nous allons étudier les séries entières réelles, c'est à dire les séries de fonctions du type $\sum a_n x^n$ où la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle. Ce qui suit s'applique aussi aux séries complexes mais on étudie le cas réel car on sait dériver une fonction réelle mais pas une fonction complexe. Dans le cas réel, les disques de convergence sont des intervalles ouvert centrés en 0, et les compacts sont des ensembles fermés bornés, donc en particulier tout segment est compact.

Prenons une série entière réelle centrée en zéro et de rayon de convergence $R > 0$. La fonction somme est donc une fonction définie sur l'intervalle ouvert $]-R,R[$:

$$\begin{aligned} S :]-R,R[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{aligned}$$

Cette fonction est continue car la série entière converge normalement (donc uniformément) sur tout segment de l'intervalle de convergence. Le reste de série au rang n est donné par :

$$\forall x \in]-R,R[, \qquad R_{n+1}(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k$$

C'est une fonction continue car elle est la différence de deux fonctions continues, et elle tend vers 0 lorsque x tend vers 0. De ce fait, observons qu'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \underset{x \to 0}{o}(x^n)$$

où $\underset{x \to 0}{o}(x^n) = R_{n+1}(x)$. Cela veut dire que la fonction S admet un développement limité à tout ordre sur l'intervalle de convergence $]-R, R[$. En particulier, en évaluant S en $x = 0$ on obtient $a_0 = S(0)$, en dérivant une fois et en évaluant en 0 on a $a_1 = S'(0)$, et en dérivant k fois et en évaluant en 0 on a $k! a_k = S^{(k)}(0)$. En résumé :

$$a_0 = S(0), \quad a_1 = S'(0) \quad \text{et pour tout } k \in \mathbb{N}, \quad a_k = \frac{S^{(k)}(0)}{k!}$$

En particulier S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$. La fonction S a une forme particulière, car c'est la limite d'une suite de polynômes. La question mathématique qu'on se demande si réciproquement, étant donnée une fonction f sur $\mathbb{R}$, il existe une série entière $\sum a_n x^n$ telle que sa somme coincide avec la fonction f sur un intervalle autour de 0 ? Nous avons besoin de vocabulaire mathématique pour rendre les choses plus précises.

Remarque 2.108. Soit $a \in \mathbb{R}$. On rappelle que tout sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ qui contient un intervalle ouvert de la forme $]a - \epsilon, a + \epsilon[$, pour au moins un certain $\epsilon > 0$ petit, est appelé *voisinage de a*.

Définition 2.109. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un voisinage de* 0*. On dit que f est* développable en série entière en zéro *(ou* analytique en zéro*) s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ à coefficients réels de rayon de convergence positif $R > 0$ ou infini, et $0 < r \leq R$ tel que :*

$$\forall\, x \in]-r, r[\cap D, \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Remarque 2.110. En général, on pourra prendre $r = R$.

Les développements en séries entières généralisent par des séries ce que les développements limités procurent par des polynômes. Première observation : une fonction développable en série entière en zéro est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $]-r, r[$, et même mieux ! Elle admet un développement limité à tout ordre, et le développement limité de f à l'ordre n en 0 est :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \underset{x \to 0}{o}(x^n)$$

où on a comme précédemment $o(x^n) = R_{n+1}(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k$, et où $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Les coefficients a_n étant déterminés de façon unique, et donc le développement en série entière de f est uniquement déterminé : la série entière $\sum a_n x^n$ est unique. On verra en réalité que si f est développable en série entière en zéro, alors la série qui est utilisée est la *série de Taylor de f* (celle dont les coefficients sont précisément $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$).

Exemple 2.111. Regardons un exemple que l'on connait bien. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$, et on pose :

$$\begin{aligned} f :\ \mathbb{R}\backslash\{\alpha\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{\alpha - x} \end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{\alpha\}$, on a $f(x) = \frac{1}{\alpha}\frac{1}{1-\frac{x}{\alpha}}$. On reconnait à droite la fonction somme de la série géométrique $\sum \left(\frac{x}{\alpha}\right)^n$, qui ne converge que pour $-1 < \left|\frac{x}{\alpha}\right| < 1$, c'est à dire pour $-|\alpha| < |x| < |\alpha|$.

Le rayon de convergence de la série géométrique $\sum \left(\frac{x}{\alpha}\right)^n$ est donc $R = |\alpha|$. La fonction f est donc développable en série entière sur l'intervalle $]-|\alpha|, |\alpha|[$ et :

$$\forall\, x \in]-|\alpha|, |\alpha|[, \qquad f(x) = \frac{1}{\alpha} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^n$$

Etre développable en série entière est une propriété locale car la fonction f est définie sur un domaine bien plus grand que $]-|\alpha|, |\alpha|[$. Nous verrons plus tard qu'elle est en réalité développable en série entière au voisinage de tout point de son domaine de définition.

Notons que pour être développable en série entière en zéro, une condition *nécessaire* sur la fonction f est d'être lisse (de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur un voisinage de zéro car si $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ alors on peut obtenir le coefficient a_n en dérivant n fois la fonction f puisqu'on a $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Par contre cette condition n'est pas *suffisante* comme nous allons le voir plus bas. La série $\sum a_n x^n$ induite par la fonction f, de par son importance dans ce contexte, a un nom particulier.

Définition 2.112. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction lisse (de classe $\mathcal{C}^\infty$) dans un voisinage de zéro. On pose $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, et on appelle* série de Taylor de f en zéro *la série entière $\sum a_n x^n$.*

Comme toute série entière, la série de Taylor de f en 0 peut ou non converger, et si elle converge, elle peut ou non converger vers f. Plus précisément, la série de Taylor de f en 0 existe toujours dès que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans un voisinage de 0. Si f est développable en une série entière $\sum a_n z^n$ au voisinage de 0, dans ce cas on a montré que les coefficients a_n de cette série sont nécessairement ceux de la série de Taylor de f en 0. Et donc pour que f soit développable en série entière, une condition *nécessaire* est que la série de Taylor de f en 0 converge simplement vers la fonction f dans un voisinage de 0. Par contre, la condition *suffisante* demande un peu plus d'explications. En effet, supposons qu'on ne sait pas si f (de classe $\mathcal{C}^\infty$) est développable en série entière en 0. Sa série de Taylor de f en 0 existe bien sûr, mais nous avons les trois cas suivants :

— soit la série de Taylor de la fonction f converge simplement vers f dans un voisinage de 0. Dans ce cas f est développable en série entière en 0 et sa série entière est sa série de Taylor (voir Proposition 2.113) ;

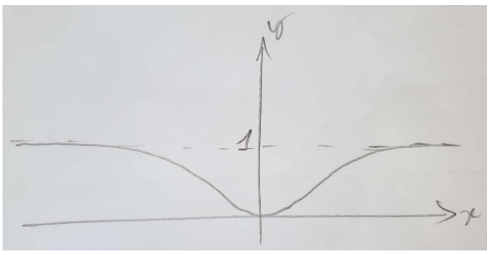
— soit la série de Taylor de f converge simplement, mais vers une fonction différente de f. Dans ce cas f n'est pas développable en série entière en 0 (voir Example 2.114) ;

— soit la série de Taylor de f diverge pour tout $x \neq 0$. Dans ce cas, f n'est pas développable en série entière (voir Exemple 2.115).

Proposition 2.113. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans un voisinage de 0. Alors f est développable en série entière en zéro si et seulement la série de Taylor de f converge simplement vers f dans un voisinage de 0.*

Exemple 2.114. Voici un exemple d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui n'est pas développable en série entière en zéro (Cauchy 1823) :

$$\begin{aligned} f :\ & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$



La fonction est continue, et infiniment dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Calculons sa dérivée en 0 grâce à la définition avec la limite du taux d'accroissement :

$$f'(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = 0$$

La limite est une forme indéterminée $\frac{0}{0}$ mais est en réalité nulle car l'exponentielle tend plus vite vers 0 que x. Pour la dérivée second en zéro nous avons le même résultat pour la même raison qu'au dessus :

$$f''(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{f'(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{\frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = 0$$

Plus généralement, on peut montrer que cette fonction est telle que $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Et donc nous avons que $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc la série de Taylor de la fonction f est la série nulle ! La série de Taylor de la fonction f converge donc vers la fonction constante nulle partout. Pourtant la fonction f n'est pas nulle en dehors de 0. Elle n'est donc pas développable en série entière.

Exemple 2.115. Un exemple du type de fonctions dont la série de Taylor diverge en tout point est la série de fonctions suivante :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n^2 x)}{2^n}$$

Cette série de fonctions converge normalement sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$. Les coefficients $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ de sa série de Taylor sont donnés par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = (-1)^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{n^n}{n!} \left(\frac{n}{2}\right)^n$$

La série entière $\sum a_n x^n$ est une série divergente dès que $x \neq 0$. Donc la série de Taylor de f est divergente donc f n'est pas développable en série entière au voisinage de 0.

Liste des DSE(0) usuels

Formule	Rayon de la série entière	Ensemble de validité
$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$	∞	$\mathbb{R}$
$\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	∞	$\mathbb{R}$
$\operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	∞	$\mathbb{R}$
$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$	∞	$\mathbb{R}$
$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	∞	$\mathbb{R}$
$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$	1 (∞ si $\alpha \in \mathbb{N}$)	$]-1,1[$ ($\mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}$)
$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$	1	$]-1,1[$
$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$	1	$]-1,1[$
$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$	1	$]-1,1]$
$-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$	1	$[-1,1[$
$\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$	1	$[-1,1]$
$\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	1	$]-1,1[$
$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	1	$[-1,1]$
$\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = x + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	1	$[-1,1]$

⚠ **Attention** : Il faut connaître par cœur au moins les dix premiers DSE(0) de ce tableau ! Certains sont très faciles à retrouver, comme par exemple arctan, par primitivation...

Les expressions de DSE(0) ci-dessus redonnent bien entendu les développements limités de fonctions usuels à tout ordre vus dans le cours d'analyse de première année.

Remarque 2.116. Peano (1884) et Borel (1895) ont montré que si on prend une suite réelle $(a_n)_n$ *quelconque*, il existe toujours une fonction lisse $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, c'est à dire qu'il existe toujours une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont la série $\sum a_n x^n$ est la série de Taylor de f en 0. Il n'y a bien sûr aucune raison pour que la série de Taylor $\sum a_n x^n$ converge, et en particulier, il n'y a aucune raison pour que f soit développable en série entière, mais elle au moins le mérite d'exister.

Ainsi, toutes les fonctions lisses (de classe $\mathcal{C}^\infty$) ne sont pas forcément la somme de leur série de Taylor en 0. Cependant nous pouvons approcher toute fonction f lisse dans un voisinage de

0 par la somme partielle de sa série de Taylor en 0 à tout ordre, plus un terme négligeable :

$$f(x) = \underbrace{f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}_{= S_n(x)} + \epsilon_n(x)$$

où ϵ_n est une fonction négligeable devant x^n définie dans un voisinage de 0. Laplace a donné une formule explicite pour la fonction reste :

$$\epsilon_n(x) = \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt$$

Cet énoncé se démontre par récurrence, à l'aide d'une intégration par parties. On appelle la formule suivante *formule de Taylor avec reste intégral de Laplace* :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \int_0^x (x-t)^n \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} dt$$

qui conduit à l'*inégalité de Taylor-Lagrange* :

$$\left| f(x) - f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \right| \leq \frac{M_{n+1}|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

où $M_{n+1} = ||f^{(n+1)}||_\infty$ est la borne supérieure de $|f^{(n+1)}|$ sur le segment $[0, x]$. On prend la limite lorsque n tend vers $+\infty$. Si le majorant tend vers 0, alors la série de Taylor de f en 0 convergera vers f sur $[0, x]$.

Exemple 2.117. Dans l'Exemple 2.114, la dérivée $n+1$-ème de f évaluée en x (fixé suffisamment petit) vaut :

$$\forall x \neq 0, \qquad f^{(n+1)}(x) = (-1)^n 2(n!) \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{n+3}}$$

Donc le majorant $M_{n+1} = ||f^{(n+1)}||_\infty$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers l'infini car d'une part la factorielle tend vers l'infini, mais aussi le facteur $\frac{1}{x^{n+3}}$ pour x (fixé suffisamment petit). Donc la série de Taylor de f en 0 ne converge pas vers f, comme on l'a déjà vu.

Remarque 2.118. Contrairement à la formule de Taylor-Lagrange, les théorèmes de Taylor-Young et de Taylor-Laplace sont vrais pour des fonctions f à valeurs complexes ou dans un espace vectoriel normé.

Définition 2.119. *On dit qu'une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est développable en série entière en $a \in D$ si la fonction $f_a : x \mapsto f(x-a)$ est développable en série entière en 0. Si une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est développable en série entière en tout point de son domaine de définition D, on dit qu'elle est* analytique*.*

Remarque 2.120. Nous pouvons en conclure que dans les fonctions lisses, il existe des fonctions qui n'admettent pas de développement en série entière en certains des points de leur domaine de définition et d'autres qui sont développables en série entière en tout point – les fonctions analytiques. Les fonctions analytiques sont des fonctions beaucoup plus contraintes que les fonctions lisses.

Exemple 2.121. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et soit $a \neq \alpha$. On reprend la fonction de l'exemple 2.111, c'est à dire $f : x \mapsto \frac{1}{\alpha - x}$. Soit $x \in \mathbb{R} \backslash \{\alpha\}$ et on pose $h = x - a \iff x = a + h$. Dans ce cas on a $f(x) = \frac{1}{\alpha-(a+h)} = \frac{1}{(\alpha-a)-h}$. Pour tout $h \in \mathbb{R} \backslash \{\alpha - a\}$, on pose $f_a(h) = \frac{1}{(\alpha-a)-h}$. Comme dans l'exemple 2.111, la fonction f_a est développable en série entière en 0 et :

$$\forall h \in \,]-|\alpha - a|, |\alpha - a|[, \qquad f_a(h) = \frac{1}{\alpha - a} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{h}{\alpha - a} \right)^n$$

ce qui se récrit par rapport à la variable $x = a + h$ comme :

$$\forall\, x \in \,]a - |\alpha - a|, a + |\alpha - a|[, \qquad f(x) = \frac{1}{\alpha - a} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x-a}{\alpha - a} \right)^n$$

Maintenant étudions plusieurs applications du développement en séries entières, comme l'exponentielle complexe et l'exponentielle de matrices. La série entière réelle $\sum \frac{x^n}{n!}$ est absolument convergente donc le rayon de convergence est infini. D'autre part la somme totale est la fonction exponentielle réelle :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

La série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ est aussi absolument convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Définition 2.122. *La fonction suivante étend l'exponentielle réelle au plan complexe :*

$$\begin{aligned} \exp :\ \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \end{aligned}$$

On l'appelle exponentielle complexe *et on la note indifféremment* exp *ou* e.

Proposition 2.123. *Pour tout nombres complexes $z, z' \in \mathbb{C}$ on a $\exp(z+z') = \exp(z)+\exp(z')$. Autrement dit, l'exponentielle complexe est un morphisme surjectif du groupe abélien $(\mathbb{C}, +)$ sur le groupe abélien $(\mathbb{C}^*, \times)$.*

Remarque 2.124. Attention ce n'est pas un morphisme bijectif car il n'est pas injectif, puisque par exemple $e^{i2\pi} = e^0 = 1$. Par conséquent, le logarithme n'a pas de définition évidente dans les nombres complexes puisqu'il n'y a pas de fonction réciproque évidente.

Proposition 2.125. *Pour tout nombre réel $x \in \mathbb{R}$, on a $\exp(ix) = \cos(x) + i\sin(x)$.*

Démonstration. On remplace z par ix dans la formule de l'exponentielle. On a donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{i^{2p}x^{2p}}{(2p)!} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{i^{2p+1}x^{2p+1}}{(2p+1)!} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p x^{2p}}{(2p)!} + i \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p x^{2p+1}}{(2p+1)!} = \cos(x) + i\mathrm{sin}(x)$$

$\square$

On en déduit que $e^{i\pi} = -1$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, etc... ainsi que la relation suivante :

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \qquad \exp^{x+iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$$

Ceci nous permet de décomposer l'exponentielle de tout nombre complexe $z = x + iy$ en parties réelle et imaginaire :

$$\mathfrak{Re}(e^z) = e^x \mathrm{cos}(y) \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{Im}(e^z) = e^x \mathrm{sin}(y)$$

De ces discussions nous déduisons les relations suivante pour l'exponentielle complexe :

$$\overline{e^z} = e^{\overline{z}} \qquad \text{et} \qquad |e^z| = e^{\mathfrak{Re}(z)}$$

Tout comme on a défini l'exponentielle complexe à partir des séries entières, on peut définir un cosinus et un sinus complexes en étendant le développement en série entière du cosinus et du sinus réels :

$$\cos(z) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p z^{2p}}{(2p)!} \qquad \text{et} \qquad \sin(z) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p z^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

Le rayon de convergence de ces deux séries est infini, comme l'exponentielle. On voit que ces deux séries entières se récrivent :

$$\cos(z) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(iz)^{2p}}{(2p)!} \qquad \text{et} \qquad i\sin(z) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(iz)^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

Comme la somme de la séries entières de $\cos(z)$ et celle de $i\sin(z)$ donne la série entière de $\exp(iz)$, on retrouve les identités bien connues :

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}$$

Ce qui fait que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\cos(ix) = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \mathrm{ch}(x) \qquad \text{et} \qquad \sin(ix) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\mathrm{sh}(x)$$

Les cosinus et sinus hyperboliques d'un réel x sont donc les cosinus et sinus du nombre purement imaginaire ix.

On peut aller un peu plus loin dans l'abstraction. Supposons qu'on ne connaisse pas le nombre transcendant π, et essayons de lui donner une définition algébrique. Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|e^{ix}| = \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ on a le résultat suivant :

Proposition 2.126. *L'application $\theta : x \mapsto e^{ix}$ est un morphisme continu surjectif du groupe $(\mathbb{R}, +)$ sur le groupe $(\mathbb{U}, \times)$ (le cercle unité complexe muni du produit). Il existe un unique nombre réel positif $\alpha > 0$ tel que $\mathrm{Ker}(\theta) = \alpha\mathbb{Z} = \{\alpha k, \text{ pour } k \in \mathbb{Z}\}$.*

Démonstration. Tout noyau d'un morphisme de groupe est un sous-groupe du groupe de départ. De ce fait, $\mathrm{Ker}(\theta)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. Or les sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$ sont soit du type $\alpha\mathbb{Z}$ pour $\alpha \geq 0$ ou soit denses dans $\mathbb{R}$. Le noyau de la fonction θ est nécessairement du premier type car si il était dense, la fonction θ serait constant égale à 1 (par continuité). $\square$

Définition 2.127. *Le nombre $\frac{\alpha}{2}$ est noté π.*

Tournons nous maintenant vers la définition de l'exponentielle de matrices. Soit (E, N) et (E', N') deux espaces vectoriels normés de dimension finie. Une application $f : E \to E'$ est linéaire si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$. On dénote $\mathcal{L}(E, E')$ l'ensemble des applications linéaires entre E et E'. Si $E = E'$, $\mathcal{L}(E)$ est l'ensemble des *endomorphismes* de E. Si on note $n = \dim(E)$ et $m = \dim(E')$, alors les éléments de $\mathcal{L}(E, E') \simeq \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des matrices rectangulaires de taille $m \times n$. Il est de dimension finie nm et nous avons déjà défini des normes sur cet espaces, par exemple :

$$\forall\, A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \qquad \|A\|_\infty = \max_{\substack{1\leq j\leq n \\ 1\leq i\leq m}} |A_{ij}| \quad \text{et} \quad \|A\|_1 = \sum_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}} |A_{ij}|$$

Rappelons qu'en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. Certaines sont juste plus pratiques que d'autres selon la situation. Nous allons définir une nouvelle norme sur $\mathcal{L}(E, E') \simeq \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Proposition 2.128. *Soit (E,N) et (E',N') deux espaces vectoriels normés de dimension finie. L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E,E') \simeq \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ des applications linéaires (ou matrices) entre E et E' admet la norme suivante, et définie par :*

$$\forall\, A \in \mathcal{L}(E,E') \qquad |||A|||_{E,E'} = \sup_{\substack{x\in E\\ x\neq 0}} \frac{N'(A(x))}{N(x)} = \sup_{s\in S_N(0,1)} N'(A(s))$$

où $S_N(0,1)$ est la sphère unité de E par rapport à la norme N. De plus, si (E'',N'') est un espace vectoriel normé de dimension finie, alors

$$\forall\, A \in \mathcal{L}(E',E''),\ \forall\, B \in \mathcal{L}(E,E'), \qquad |||A\circ B|||_{E,E''} \leq |||A|||_{E',E''} \cdot |||B|||_{E,E'} \tag{2.6}$$

Démonstration. Nous prouverons dans le cours du semestre prochain pourquoi le quotient $\frac{N'(A(x))}{N(x)}$ est majoré, et donc admet une borne supérieure, pour tout $A \in \mathcal{L}(E,E')$.

Soit $A \in \mathcal{L}(E,E') \simeq \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ et soit $x \neq 0_E$ un élément de E. Alors on a que $\frac{A(x)}{N(x)} = A\left(\frac{x}{N(x)}\right)$ car A est une application linéaire. Or il est évident que $\frac{x}{N(x)}$ est un élément de la sphère unité de E (par rapport à la norme N). L'égalité des deux bornes supérieures est donc établie. Maintenant, il est simple de montrer que l'application à valeurs positives $A \mapsto |||A|||_{E,E'}$ définit une norme sur $\mathcal{L}(E,E')$ (caractère défini, homogénéité et inégalité triangulaire).

Pour prouver, l'Equation (2.6), il suffit de remarquer que pour tout élément $x \neq 0_E$ de E, on a par définition de la borne supérieure $\frac{N'(B(x))}{N(x)} \leq |||B|||_{E,E'}$, et que pour tout $x' \neq 0_{E'}$ de E', on a de même $\frac{N''(A(x'))}{N'(x')} \leq |||A|||_{E',E''}$. En écrivant $x' = B(x)$, cela implique les inégalités suivantes :

$$N''(A\circ B(x)) \leq |||A|||_{E',E''} \cdot N'(B(x)) \leq |||A|||_{E',E''} \cdot |||B|||_{E,E'} \cdot N(x)$$

Ce qui implique directement que $\frac{N''(A\circ B(x))}{N(x)} \leq |||A|||_{E',E''} \cdot |||B|||_{E,E'}$. L'inégalité étant vraie pour tout $x \neq 0_E$, on obtient l'Equation (2.6). $\square$

Définition 2.129. *Soit (E,N) et (E',N') deux espaces vectoriels normés de dimension finie. La norme $|||.|||_{E,E'}$ sur $\mathcal{L}(E,E')$ est appelée* norme subordonnée à N et N'.

Définition 2.130. *Une* algèbre de Banach *est une $\mathbb{K}$-algèbre $(A,+,\times)$ munie d'une norme $\|.\| : A\times A \to \mathbb{R}_+$ telle que $\|.\|$ est une* norme d'algèbre*, c'est à dire que :*

$$\forall\, a,b \in A, \qquad \|a\times b\| \leq \|a\|\cdot\|b\|$$

et telle que $(A,\|.\|)$ est un espace de Banach.

Exemple 2.131. Soit (E,N) un espace vectoriel normé de dimension finie. Alors l'espace des endomorphismes $\mathcal{L}(E)$ muni de la norme subordonnée est un espace de Banach, et l'équation (2.6) fait de $(\mathcal{L}(E),\circ,|||.|||_E) \simeq (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\cdot,|||.|||_{\mathbb{R}^n})$ une algèbre de Banach.

Proposition 2.132. *Soit $\mathbb{R}^m$ muni de la norme $\|.\|_\infty$, et soit $(\mathcal{M}_m(\mathbb{R}),|||.|||_{\mathbb{R}^m})$ l'algèbre de Banach des matrices carrées réelles de taille $m\times m$. Alors la série entière $\sum \frac{M^n}{n!}$ converge en norme et admet pour rayon de convergence $R = +\infty$.*

Démonstration. Soit A une telle matrice. La norme subordonnée à la norme infinie de $\mathbb{R}^m$ nous donne que

$$|||A|||_{\mathbb{R}^m} = \sup_{s\in S_\infty(0,1)} \|A(s)\|_\infty$$

Or rappelons nous que la sphère unité de la norme infinie dans $\mathbb{R}^m$ est (hyper)cubique ! C'est à dire que $s \in S_\infty(0,1)$ si et seulement si il existe au moins une composante du vecteur s qui vaut ± 1. Prenons une ligne de la matrice A, par exemple la ligne i. Les termes de cette ligne peuvent être négatifs ou positifs. Mais on peut toujours prendre un vecteur $s_i = (s_i^1, \ldots, s_i^m) \in S_\infty(0,1)$ tel que le signe de s_i^j est le signe de A_{ij}, pour tout $1 \leq j \leq m$. Dans ce cas, la i-ème composante du vecteur $A(s_i)$ est exactement la somme $|A_{i1}| + |A_{i2}| + \ldots + |A_{im}|$. La norme subordonnée à la norme infinie de $\mathbb{R}^m$ nous donne ainsi le résultat suivant :

$$|||A|||_{\mathbb{R}^m} = \max_{1\leq i\leq m} \left(\sum_{j=1}^{m} |A_i j| \right) \leq m \, \|A\|_\infty$$

Par l'Equation (2.6), on montre par récurrence que $|||A^n|||_{\mathbb{R}^m} \leq \left(|||A|||_{\mathbb{R}^m}\right)^n$. Avec l'inégalité du dessus, et en notant $M = m \, \|A\|_\infty$ (c'est une constante), cela nous donne que $|||A^n|||_{\mathbb{R}^m} \leq \left(m \, \|A\|_\infty\right)^n$. Et en divisant par $n!$ nous avons l'encadrement suivant :

$$0 \leq \frac{|||A^n|||_{\mathbb{R}^m}}{n!} \leq \frac{M^n}{n!}$$

Le membre de droite est le terme général d'une série positive convergente partout (la série exponentielle), donc par la Proposition (2.15), nous avons que la série positive $\sum \frac{|||A^n|||_{\mathbb{R}^m}}{n!}$ converge, c'est à dire que la série $\sum \frac{A^n}{n!}$ converge en norme. Ceci étant vraie pour toute matrice A, nous en déduisons que le rayon de convergence est infini. $\square$

Définition 2.133. *On définit la fonction suivante sur les matrices réelles carrées $m \times m$:*

$$\begin{aligned} \exp : \quad \mathcal{M}_m(\mathbb{R}) &\longrightarrow \quad \mathcal{M}_m(\mathbb{R}) \\ A &\longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} \end{aligned}$$

On l'appelle exponentielle de matrices *et on la note indifféremment* exp *ou* e.

Remarque 2.134. Comme l'exponentielle complexe étend l'exponentielle réelle au plan complexe, il existe une exponentielle de matrices carrées complexes

Proposition 2.135. *Pour tout $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$, on a* $\det(e^A) = e^{\mathrm{tr}(A)}$.

A partir de cette formule, on apprend que la fonction exponentielle prend valeurs dans les matrices inversibles (de déterminant non nul). C'est une propriété partagée avec la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, qui est aussi à valeurs dans les inversibles $\mathbb{R}^*$ et $\mathbb{C}^*$, respectivement. D'autre part, on sait que dans ces deux derniers cas, l'exponentielle est un morphisme de groupe car la multiplication est commutative : $e^{z+z'} = e^z e^{z'} = e^{z'} e^z$. Or pour les matrices ce n'est pas le cas, et de très simples exemples le montrent simplement. Par exemple considérons les matrices $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ et $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Alors on a que $e^{A+B} \neq e^A e^B$, $e^{A+B} \neq e^B e^A$ et que $e^A e^B \neq e^B e^A$. C'est à dire que non seulement l'exponentielle de matrices n'est pas un morphisme d'algèbres, mais que ce n'est même pas un morphisme de groupes entre $(\mathcal{M}_m(\mathbb{R}), +)$ et $(GL_m(\mathbb{R}), \times)$ (bien qu'elle soit surjective sur ce dernier). Cela vient du fait que les matrices ne sont pas commutatives par rapport à la mutiplication. Au contraire, l'écart à la commutativité est mesurée par le commutateur (crochet de Lie) de deux matrices $[A, B] = A \times B - B \times A$. Ce commutateur apparaitra très justement dans la formule qui relie e^{A+B} et $e^A e^B$, à travers la formule de Baker–Campbell–Hausdorff-Dynkin donnée par :

$$e^{A+B} = e^A \, e^B \, e^{-\frac{1}{2}[A,B]} \, e^{\frac{1}{6}(2[B,[A,B]]+[A,[A,B]])} \, e^{-\frac{1}{24}([[[A,B],A],A]+3[[[A,B],A],B]+3[[[A,B],B],B])} \ldots$$

Plus généralement, l'exponentielle est une forme d'intégration entre algèbres de Lie et groupes de Lie, et souvent difficile à mener, tandis que l'opération inverse est la différentiation et est plus simple.