

MAT 102 : Etude locale des fonctions et intégration de Riemann

Sylvain Lavau

Galatasaray Üniversitesi

Table des matières

1 Comportement local et asymptotique des fonctions	1
1.1 Comparaison de suites et de fonctions	1
1.2 Développements limités	6
1.3 Courbes paramétrées	22
1.4 Géométrie des courbes paramétrées	32
2 Théorie de l'intégration des fonctions	53
2.1 Approfondissement sur l'analyse réelle	53
2.2 Théorie de l'intégration de Darboux-Riemann	60
2.3 Intégrales impropres et curvilignes	72

Remerciements. *Ces notes de cours s'appuient sur plusieurs manuscrits, dont :*

- *F. Liret et D. Martinais, Analyse 2ème année, Dunod.*
- *R. Bartle et D. Sherbert, Introduction to Real Analysis, John Wiley & Sons.*
- *le cours d'Analyse d'EXO 7*
- *les cours de F. Fayard et D. Choïmet au Lycée du Parc sur les années 2006-08*

Le présent manuscrit contient plusieurs images tirées de ces ressources, ainsi que de Wikipedia (entre autres) que je remercie ici. Il y a bien sûr encore des fautes et des approximations donc n'hésitez pas à m'en faire part.

1 Comportement local et asymptotique des fonctions

1.1 Comparaison de suites et de fonctions

Lors de notre étude des limites, nous faisons face à un problème, illustré par exemple par les deux limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x}$$

Dans le premier cas, $x \rightarrow 0$ en même temps que $\ln(x) \rightarrow -\infty$ donc nous avons la forme indéterminée $0 \times (-\infty)$. Dans le deuxième cas nous avons $x \rightarrow +\infty$ et $e^{-x} \rightarrow 0$ donc nous avons la forme indéterminée $(+\infty) \times 0$ ou encore, de façon équivalente $\frac{+\infty}{+\infty}$. On ne peut pas savoir quelle est la limite dans les deux cas, sauf si on sait comparer les vitesses de convergence des différentes fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto e^x$. C'est le sujet de cette section.

Définition 1.1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites, telles qu'à partir d'un certain rang, $v_n \neq 0$. On dit que :

1. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équivalente à $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 1, et on note $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} v_n$;
2. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ - ou que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un petit o de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ - si la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0, et on note $u_n = \underset{n \rightarrow \infty}{o}(v_n)$;
3. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dominée par $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ - ou que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un grand O de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ - si la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, et on note $u_n = \underset{n \rightarrow \infty}{O}(v_n)$.

Exemple 1.2. Un exemple trivial est de prendre $u_n = n$ et $v_n = n + 1$, ou $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Exemple 1.3. Deux exemples importants sont 1. la formule de Stirling : $n! \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$, et 2. la série harmonique : si on pose $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, alors $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \ln(n)$. Ce dernier cas est intéressant, car même $(u_n)_n$ et $\ln(n)$ tendent les deux vers l'infini, la différence $v_n = u_n - \ln(n)$ converge vers une limite finie, notée γ et appelée la *constante d'Euler-Mascheroni*. On ne sait toujours pas si ce nombre est rationnel ou non.

Remarque 1.4. Attention, ça n'a pas de sens de dire qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équivalente à 0 (la suite nulle), car on ne peut pas diviser par zéro ! Aussi, les équivalents peuvent se multiplier mais ne s'ajoute pas. Les trois propriétés "être équivalent", "être négligeable" et "être dominée" sont des propriétés à l'infini des suites, c'est à dire qu'elles ne font sens qu'à la limite $n \rightarrow +\infty$.

Exemple 1.5. Montrer que la propriété "être équivalent" est une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites.

Baucoup de résultats du cours sont basés sur la proposition suivante, qu'il faut absolument connaître par coeur :

Proposition 1.6. Comparaisons entre suites fondamentales. Soit $\alpha, \beta > 0$ et $a > 1$. On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \ln(n)^\beta, \quad v_n = n^\alpha, \quad w_n = a^n, \quad \text{et} \quad z_n = n!$$

Alors $u_n = \underset{n \rightarrow \infty}{o}(v_n)$, $v_n = \underset{n \rightarrow \infty}{o}(w_n)$ et $w_n = \underset{n \rightarrow \infty}{o}(z_n)$.

Démonstration. On peut partir de l'inégalité $\ln(x) \leq x - 1$ vue dans le cours sur la convexité et valide pour tout $x > 0$. Alors c'est vrai pour $x = \sqrt{n}$, et donc $\ln(\sqrt{n}) \leq \sqrt{n} - 1 \leq \sqrt{n}$. Donc $\frac{\ln(\sqrt{n})}{\sqrt{n}} \leq 1$. Maintenant on peut en déduire la chaîne d'inégalités suivantes :

$$0 \leq \frac{\ln(n)}{n} = \frac{2 \ln(\sqrt{n})}{n} = \frac{2}{\sqrt{n}} \frac{\ln(\sqrt{n})}{\sqrt{n}} \leq \frac{2}{\sqrt{n}}$$

On a un encadrement du terme général d'une suite par les termes généraux de deux suites convergent vers 0 donc la suite du milieu converge vers 0. Donc $\ln(n) = \underset{n \rightarrow \infty}{o}(n)$. Plus généralement, le même argument fonctionne avec la suite de terme général $\frac{\ln(n)}{n^\beta}$:

$$0 \leq \frac{\ln(n)}{n^\beta} = \frac{\ln(n^{\frac{\alpha}{2\beta}})}{\frac{\alpha}{2\beta} n^{\frac{\alpha}{2\beta}}} = \frac{2\beta}{\alpha n^{\frac{\alpha}{2\beta}}} \frac{\ln(n^{\frac{\alpha}{2\beta}})}{n^{\frac{\alpha}{2\beta}}} \leq \frac{2\beta}{\alpha n^{\frac{\alpha}{2\beta}}}$$

Le terme de droite tend vers zéro donc par le théorème des gendarmes on déduit que $\frac{\ln(n)}{n^\beta} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ donc que $u_n = o_{n \rightarrow \infty}(v_n)$.

Pour la seconde négligence, on a :

$$\ln\left(\frac{n^\alpha}{a^n}\right) = \ln(n^\alpha) - \ln(a^n) = \alpha \ln(n) - n \ln(a) = n \left(\alpha \frac{\ln(n)}{n} - \ln(a) \right)$$

Comme $\ln(n) = o_{n \rightarrow \infty}(n)$, c'est à dire que $\frac{\ln(n)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, nous avons que :

$$\ln\left(\frac{n^\alpha}{a^n}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -n \ln(a)$$

Comme $a > 1$, le membre de droite tend vers $-\infty$, donc $\ln\left(\frac{n^\alpha}{a^n}\right)$ aussi, ce qui veut dire que $\frac{n^\alpha}{a^n}$ converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$. \square

Proposition 1.7. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites telles que $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$. Alors on a les propriétés suivantes :

1. $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} v_n$ si et seulement si il existe une suite $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergant vers 0 telle que pour tout $n \geq N$, $u_n = v_n(1 + \epsilon_n)$.
2. $u_n = o_{n \rightarrow \infty}(v_n)$ si et seulement si il existe une suite $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergant vers 0 telle que pour tout $n \geq N$, $u_n = v_n \epsilon_n$;
3. $u_n = O_{n \rightarrow \infty}(v_n)$ si et seulement si il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $n \geq N$, $|u_n| \leq C|v_n|$.

Démonstration. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel qu'on a pour tout $n \geq N$, $v_n \neq 0$. Posons alors $\epsilon_n = 0$ pour tout $0 \leq n \leq N - 1$ et $\epsilon_n = \frac{u_n}{v_n} - 1$. Alors la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 1 si et seulement si $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0. Même démonstration pour le deuxième cas. Le troisième cas est la définition du grand O . \square

La notion d'équivalence, de négligence et de domination reste aussi vrai pour les fonctions, et en réalité, cette définition est plus générale et redonne celle des suites car une suite n'est qu'une fonction dont le domaine de définition est $D = \mathbb{N}$.

Définition 1.8. Soit $A \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et soit $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions telles que dans un voisinage de A , $g(x) \neq 0$ (sauf peut être en A si fini). On dit que :

1. f est équivalente à g en A si la fonction $\frac{f}{g}$ tend vers 1 quand x tend vers A , et on note $f(x) \underset{x \rightarrow A}{\sim} g(x)$;
2. f est négligeable devant g en A – ou que f est un petit o de g en A – si la fonction $\frac{f}{g}$ tend vers 0 quand x tend vers A , et on note $f(x) = o_{x \rightarrow A}(g(x))$;
3. f est dominée par g en A – ou que f est un grand O de g en A – si la fonction $\frac{f}{g}$ est bornée quand x tend vers A , et on note $f(x) = O_{x \rightarrow A}(g(x))$.

Remarque 1.9. De la définition on déduit que la fonction g peut être une constante non nulle dans un voisinage de A et dans ce cas dire que f est équivalent à cette constante revient à dire que f converge vers cette valeur. Plus précisément si $g(x) = \ell$ dans un voisinage proche de A , alors

$$f(x) \underset{x \rightarrow A}{\sim} \ell \quad \implies f(x) \xrightarrow{x \rightarrow A} \ell$$

Cependant ℓ ne peut pas être égale à 0 : on ne peut pas être équivalent à 0, ou négligeable/dominée devant 0. C'est fondamental.

$\sin(x) \sim x$	
$\cos(x) \sim 1$	
$\tan(x) \sim x$	
$1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$	(utiliser $1 - \cos(x) = 2 \sin^2(\frac{x}{2})$)
$e^x \sim 1$	
$e^x - 1 \sim x$	
$\ln(1+x) \sim x$	
$(1+x)^\alpha \sim 1$	
$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$	
$a_p x^p + \dots + a_n x^n \sim a_p x^p$ (avec $p < \dots < n, a_p \neq 0$)	

FIGURE 1 – Plusieurs équivalents importants des fonctions usuelles en 0 (à connaître par coeur).

Proposition 1.10. Soit $A \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et soit $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions telles que dans un voisinage de A , $g(x) \neq 0$ (sauf peut être en A si fini). Alors on a les propriétés suivantes :

1. $f(x) \underset{x \rightarrow A}{\sim} g(x)$ si et seulement si il existe une fonction $\epsilon : D \rightarrow \mathbb{R}$ convergeant vers 0 en A telle que pour tout x dans un voisinage de A , on a $f(x) = g(x)(1 + \epsilon(x))$;
2. $f(x) = \underset{x \rightarrow A}{o}(g(x))$ si et seulement si il existe une fonction $\epsilon : D \rightarrow \mathbb{R}$ convergeant vers 0 en A telle que pour tout x dans un voisinage de A , on a $f(x) = g(x)\epsilon(x)$.
3. $f(x) = \underset{x \rightarrow A}{O}(g(x))$ si et seulement si il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout x dans un voisinage de A , on a $|f(x)| \leq C|g(x)|$.

Démonstration. Similaire à la preuve de la Proposition 1.7. □

Exemple 1.11. Soit $h : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable au point $a \in D$. Dans ce cas on a vu qu'il existe une fonction $\epsilon : D \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

- ϵ est continue en a , et $\epsilon(a) = 0$;
- $h(x) = h(a) + h'(a)(x - a) + (x - a)\epsilon(x)$ pour tout $x \in D$.

Le premier point veut dire que $\epsilon(x)$ tend vers 0 quand x tend vers a , ce qui nous permet d'écrire le second point comme :

$$h(x) = h(a) + h'(a)(x - a) + \underset{x \rightarrow a}{o}(x - a) \tag{1.1}$$

Si on suppose en outre que $h'(a) \neq 0$, on obtient que $h(x) - h(a) \underset{x \rightarrow a}{\sim} h'(a)(x - a)$.

Corollaire 1.12. Soit $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et soit $A \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, alors :

$$\begin{aligned} f(x) = \underset{x \rightarrow A}{o}(1) &\iff f(x) \xrightarrow{x \rightarrow A} 0 \\ f(x) = \underset{x \rightarrow A}{O}(1) &\iff f \text{ est bornée dans un voisinage de } A \\ f(x) \underset{x \rightarrow A}{\sim} g(x) &\iff f(x) = g(x) + \underset{x \rightarrow A}{o}(g(x)) \end{aligned}$$

Démonstration. Exercice. □

Remarque 1.13. On peut multiplier et inverser les équivalents de suites et de fonctions (notamment parce qu'on ne peut pas être équivalent à la suite/fonction nulle). Par contre on ne peut pas les ajouter, comme l'exemple suivant le montre : $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ et $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ en zéro, mais $\ln(1+x) - \sin(x)$ n'est pas équivalent à zéro (on ne peut pas être équivalent à zéro).

Exemple 1.14. Nous allons utiliser la formule (1.1) pour obtenir un équivalent de la fonction arctangente en $x = 0$. La fonction arctangente est l'inverse de la fonction tangente : c'est une fonction $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, telle que :

$$\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, \quad \arctan(\tan(x)) = x \quad \text{et} \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad \tan(\arctan(y)) = y$$

Nous savons comment dériver l'inverse d'une fonction, et nous obtenons :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(y) = \frac{1}{\tan'(\arctan(y))}$$

Or nous connaissons la dérivée de la fonction tangente : $\tan'(x) = 1 + (\tan(x))^2$, ce qui nous donne donc (à connaître par coeur) :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}$$

Nous avons donc d'après la formule (1.1) :

$$\arctan(x) = \arctan(0) + \arctan'(0)x + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x)$$

ce qui nous donne, une fois qu'on a vu que $\arctan(0) = 0$ et $\arctan'(0) = 1$:

$$\arctan(x) = x + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x) \quad \iff \quad \arctan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} (x)$$

Comme le montre la Proposition 1.10 qui reprend la Proposition 1.7, on voit qu'il faut considérer $\underset{x \rightarrow A}{o}(g(x))$ et $\underset{x \rightarrow A}{O}(g(x))$ comme des fonctions, pas juste comme des notations abstraites. On le comprend bien dans la proposition suivante qui est importante :

Proposition 1.15. *Soit $A \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et soit $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions telles que dans un voisinage de A , $g(x) \neq 0$ (sauf peut être en A si fini), et soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors nous avons :*

$$\begin{aligned} f(x) \times \underset{x \rightarrow A}{o}(g(x)) &= \underset{x \rightarrow A}{o}(f(x)g(x)) \\ f(x) \times \underset{x \rightarrow A}{O}(g(x)) &= \underset{x \rightarrow A}{O}(f(x)g(x)) \\ \lambda \underset{x \rightarrow A}{o}(g(x)) + \mu \underset{x \rightarrow A}{o}(g(x)) &= \underset{x \rightarrow A}{o}(g(x)) \end{aligned}$$

Exemple 1.16. On ne peut ajouter des petits o que si deux fonctions (ou suites) sont négligeables devant la même fonction. Par exemple on a $x^2 = \underset{x \rightarrow +\infty}{o}(x^3)$ et $\ln(x) = \underset{x \rightarrow +\infty}{o}(x)$, mais $x^2 + \ln(x) \neq \underset{x \rightarrow +\infty}{o}(x^3) + \underset{x \rightarrow +\infty}{o}(x)$, ça n'a pas de sens d'écrire cela. Le deuxième petit o se fait absorber dans le premier car x est négligeable par rapport à x^3 en $+\infty$, et on peut écrire rigoureusement $x^2 + \ln(x) = \underset{x \rightarrow +\infty}{o}(x^3)$.

Exemple 1.17. Pour illustrer le troisième item de la Proposition 1.15, prenons $g(x) = x$, $f(x) = x \sin(x)$ et $h(x) = x^2$. Alors nous avons que pour tout $x \neq 0$, $\frac{f(x)}{g(x)} = \sin(x)$ qui tend vers 0 lorsque x tend vers zéro, et de même pour la fonction $\frac{h(x)}{g(x)} = x$. On en déduit que f et h sont toutes les deux négligeables devant la fonction g en 0 :

$$f(x) = \underset{x \rightarrow 0}{o}(g(x)) \quad \text{et} \quad h(x) = \underset{x \rightarrow 0}{o}(g(x))$$

Dans ce cas, d'après la Proposition, on peut écrire pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\lambda f(x) + \mu h(x) = \underset{x \rightarrow 0}{o}(g(x))$$

1.2 Développements limités

Les deux notions les plus importantes sont celles d'équivalent et de négligeabilité. Approfondissons ce qu'on peut faire avec celles-ci. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur le domaine D (qu'on suppose ouvert, et très souvent un intervalle ouvert ou une union d'intervalles ouverts). La fonction dérivée $f' : D \rightarrow \mathbb{R}$ est donnée par :

$$\begin{array}{ccc} f' : D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$$

On suppose que la fonction dérivée est elle aussi dérivable, en tout point de D . Cela définit la dérivée seconde de la fonction f :

$$\begin{array}{ccc} f'' : D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (f')'(x) \end{array}$$

Si jamais la fonction dérivée seconde est dérivable sur D , on peut continuer le processus en la dérivant, et cela définit la dérivée troisième f''' , aussi notée $f^{(3)}$, et ainsi de suite.

Définition 1.18. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un domaine ouvert D . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit, si elle existe, la dérivée n -ième de f – notée $f^{(n)}$ – par la récurrence suivante :

$$f^{(0)} = f \quad \text{et} \quad f^{(k)} = (f^{(k-1)})' \quad \text{pour tout } 1 \leq k \leq n.$$

En particulier, $f^{(1)} = f'$ et $f^{(2)} = f''$. Dans ce cas on dit que f est n fois dérivable.

Remarque 1.19. La définition implique que si la fonction n'est pas dérivable à un certain rang N – c'est à dire si $f^{(N-1)}$ est bien définie mais n'est pas dérivable – alors $f^{(m)}$ n'existe pas, pour tout $m \geq N$. D'autre part, il est direct de voir qu'une fonction dérivable n fois a toutes ses dérivées k -ièmes continues, pour $0 \leq k \leq n-1$. En effet, si $f^{(k+1)}$ existe, cela veut dire que $f^{(k)}$ est dérivable. Cela veut dire que $f^{(k)}$ est continue.

Proposition 1.20. La dérivée n -ième d'un produit de deux fonctions f, g au moins n fois dérivables est :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

où on rappelle la valeur du coefficient binomial $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Remarque 1.21. La preuve utilise l'astuce suivante : si on a une situation de la forme $\sum_{k=0}^n A_{k+1} + B_k$, il faut séparer en deux $\sum_{k=0}^n A_{k+1} + \sum_{k=0}^n B_k$, et réindexer la première somme pour avoir :

$$\sum_{k=1}^{n+1} A_k + \sum_{k=0}^n B_k = A_{n+1} + B_0 + \sum_{k=1}^n A_k + B_k$$

Démonstration. On prouve notre formule par récurrence. Pour $n = 0$, on a $(fg)^{(0)} = fg$. Pour $n = 1$ aussi c'est vrai puisque $(fg)' = f'g + fg'$ et les coefficients binomiaux sont $\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$. Maintenant supposons que la formule est vraie pour tout $0 \leq k \leq n$ et montrons là au rang $n+1$. Supposons que f et g sont dérivables au rang $n+1$. Prenons la formule au rang n et

dérivons là une fois :

$$\begin{aligned}
 (fg)^{(n+1)} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (f^{(k+1)}g^{(n-k)} + f^{(k)}g^{(n-k+1)}) \\
 &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)}g^{(n-(k-1))} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}g^{(n+1-k)} \\
 &= \sum_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) f^{(k)}g^{(n+1-k)} \\
 &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)}g^{(n+1-k)}
 \end{aligned}$$

où on a utilisé la formule $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ en supposant que $\binom{n}{-1} = \binom{n}{n+1} = 0$. □

Remarque 1.22. C'est la même preuve que celle du binôme de Newton ! Où l'on a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

On peut retrouver la formule de Newton à partir de celle de Leibniz pour la dérivée d'un produit de deux fonctions f et g en prenant $f(x) = e^{ax}$ et $g(x) = e^{bx}$ et en dérivant leur produit $e^{(a+b)x}$ n fois.

Dans la suite on se restreint au cas où $D = I$ est un intervalle ouvert. Rappelons la formule des accroissements finis ; si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable et si $a < b \in I$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{c'est à dire} \quad f(b) = f(a) + f'(c)(b - a)$$

Cette formule est en fait un cas particulier d'une formule plus générale pour les fonctions dérivables n fois.

Proposition 1.23. Formule de Taylor-Lagrange. *Si la fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable n fois sur $]a, b[$ et telle que $f, f', f^{(2)}, \dots, f^{(n-1)}$ sont continues sur $[a, b]$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que :*

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(b-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n$$

Démonstration. Si $n = 1$ on retrouve le théorème des accroissements finis. Sinon, $n \geq 2$, on définit la quantité A par la formule suivante :

$$A = \frac{n!}{(b-a)^n} \left[f(b) - f(a) - f'(a)(b-a) - \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 - \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(b-a)^3 - \dots - \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} \right]$$

Comme dans la démonstration du théorème des accroissements finis, on introduit une fonction auxiliaire définie pour tout $x \in [a, b[$:

$$\varphi(x) = f(b) - f(x) - f'(x)(b-x) - \frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2 - \frac{f^{(3)}(x)}{3!}(b-x)^3 - \dots - \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} - \frac{(b-x)^n}{n!}A$$

Comme la fonction f est dérivable n fois, alors φ est dérivable une fois. La définition de A donne $\varphi(a) = 0$. D'autre part, on a directement que $\varphi(b) = 0$. On peut donc appliquer le théorème de Rolle et il existe $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Or la dérivée de φ sur l'intervalle $]a, b[$ vaut :

$$\varphi'(x) = \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} (A - f^{(n)}(x))$$

Comme $c \neq b$, l'égalité $\varphi'(c) = 0$ donne $f^{(n)}(c) = A$ d'où le résultat. \square

Remarque 1.24. La formule de Taylor-Lagrange, qui est une généralisation à l'ordre n du théorème des accroissements finis, n'est en fait qu'une conséquence de celui-ci !

Exemple 1.25. Prenons comme fonction cosinus et fixons $x \in \mathbb{R}$. Soit $a = 0$ et $b = x > 0$, ce qui fait que $b - a = x$. On connaît les dérivées successives du cosinus et on a donc $\cos^{(4p)}(t) = \cos(t)$, $\cos^{(4p+1)}(t) = -\sin(t)$, $\cos^{(4p+2)}(t) = -\cos(t)$, $\cos^{(4p+3)}(t) = \sin(t)$, pour tout $t \in [0, x]$. Quand on évalue les dérivées en $a = 0$, seules les dérivées d'ordre pair survivent et on a le tableau suivant :

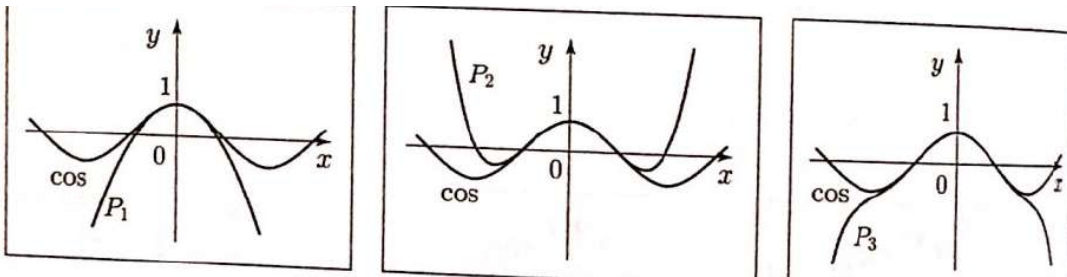
n	0	1	2	3	4	5	6
$\cos^{(n)}(0)$	1	0	-1	0	1	0	-1

D'après la Proposition 1.23, il existe un certain $0 < c < x$ tel que (par exemple, choix arbitraire) :

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} - \sin(c) \frac{x^7}{7!}$$

Comme la fonction est dérivable une infinité de fois et que ses dérivées n -ièmes sont continues partout, nous pouvons pousser le développement en puissance de x beaucoup plus loin. Par exemple, à n'importe quel ordre $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons qu'il existe $c_n \in]0, x[$ tel que

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + \frac{\cos^{(n)}(c_n)}{n!} x^n$$



Exemple 1.26. Prenons la fonction exponentielle sur \mathbb{R} , c'est à dire $f(t) = e^t$ qu'on note aussi $\exp(t)$, et fixons $x > 0$ (le même raisonnement fonctionne pour $x < 0$). La fonction exponentielle est dérivable une infinité de fois sur \mathbb{R} . Comme les dérivées successives de l'exponentielle sont elle-même, lorsqu'elles sont évaluées en 0, elles donnent toujours la même valeur $\exp^{(k)}(0) = e^0 = 1$. D'autre part comme la fonction exponentielle est croissante, nous avons $1 \leq e^t \leq e^x$ pour tout $0 \leq t \leq x$, c'est à dire que $1 \leq \exp^{(n)}(t) \leq e^x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq t \leq x$. Soit $a = 0$ et $b = x$, donc $b > a$. Comme l'exponentielle est dérivable une infinité de fois sur \mathbb{R} , les conditions de la Proposition 1.23 sont satisfaites sur le segment $[0, x]$. Il existe donc $c_n \in]a, b[$ tel que nous avons l'égalité suivante :

$$\left| e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \right) \right| = e^{c_n} \frac{x^n}{n!}$$

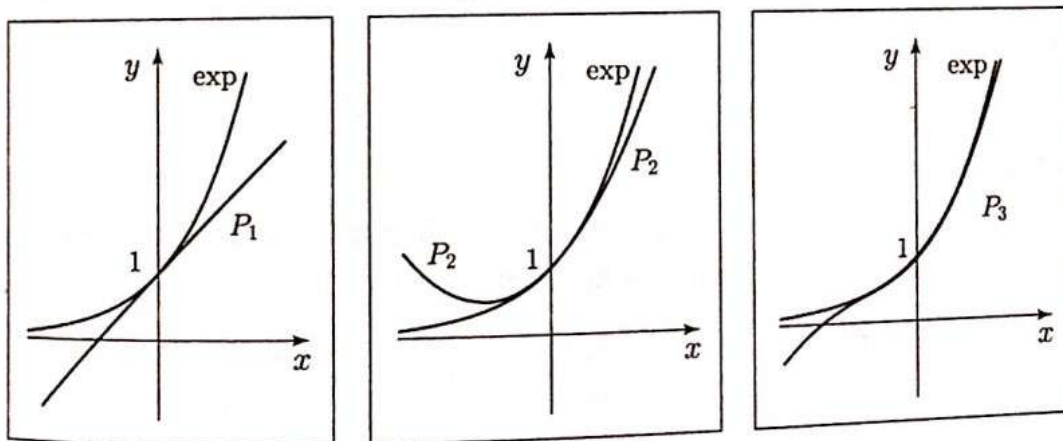
Mais comme $1 \leq e^{c_n} \leq e^x$ (on rappelle que x est fixé), on obtient la majoration suivante, qui ne dépend plus du nombre c_n :

$$\left| e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \right) \right| \leq e^x \frac{x^n}{n!}$$

Posons $P_{n-1}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}$. Autrement dit nous avons l'inégalité suivante :

$$|e^x - P_{n-1}(x)| \leq e^x \frac{x^n}{n!} \quad (1.2)$$

On peut prendre un autre entier $n' \in \mathbb{N}^*$, et dans ce cas il existe un autre $c_{n'}$ dans $]0, x[$ tel que l'inégalité (1.2) est vraie pour n' : $|e^x - P_{n'-1}(x)| \leq e^x \frac{x^{n'}}{n'!}$. L'inégalité (1.2) est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.



Par la Proposition 1.6, nous savons que $x^n = o(n!)$ si $x > 1$, mais c'est aussi vrai si $1 > x > 0$. Nous déduisons que le membre de droite de l'inégalité (1.2) tend vers 0 quand n tend vers l'infini (rappelons que x est fixé). Alors nous déduisons que $\lim_{n \rightarrow \infty} e^x - P_n(x) = 0$. Nous déduisons que la suite $(P_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers le nombre réel e^x en l'infini. Maintenant, si $x < 0$, on effectue le même raisonnement sur $[x, 0]$ et on prend comme majorant des dérivées de l'exponentielle le nombre 1, car $e^x \leq e^t \leq 1$ pour tout $t \in [x, 0]$. Le reste du raisonnement est inchangé. Nous avons donc prouvé la proposition suivante :

Proposition 1.27. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^x$.

Remarque 1.28. On note donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$. En d'autres mots, on a approché la fonction exponentielle par un polynôme infini (une série entière).

Nous voyons que le développement de Taylor-Lagrange nous permet de remplacer une fonction au voisinage d'un point, en fonction d'un polynôme à l'ordre n , et de majorer la différence entre la fonction et le polynôme grâce à l'inégalité de Taylor. Nous allons désormais développer un langage et une machinerie appropriée à ce genre de situations, qui nous permettra d'étudier en détails les fonctions localement autour d'un point.

Définition 1.29. Soit I un intervalle ouvert non vide, soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $a \in I$. On appelle développement limité (DL) de f à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ en a tout polynôme $P_n(x)$ de degré au plus n tel que :

$$f(x) - P_n(x) = o_{x \rightarrow a}((x - a)^n) \quad \text{c'est à dire que} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - a)^n} = 0 \quad (1.3)$$

Remarque 1.30. On peut écrire ces formules de façon tout à fait équivalentes en écrivant $h = x - a$, et en définissant $Q_n(h) = P_n(a + h)$, de façon à ce qu'on ait (formulation équivalente de la définition) :

$$f(a + h) = Q_n(h) + o_{h \rightarrow 0}(h^n) \quad \text{et} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - Q_n(h)}{h^n} = 0$$

Exemple 1.31. Reprenons l'Exemple 1.26 et la Proposition 1.27. Fixons $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [-1, 1]$, comme $e^{-1} \leq e^x \leq e^1$, nous avons :

$$\left| e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} \cdots + \frac{x^n}{(n)!} \right) \right| \leq e^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

En divisant les deux côtés par x^n , nous obtenons :

$$\left| \frac{e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} \cdots + \frac{x^n}{(n)!} \right)}{x^n} \right| \leq e^x \frac{x}{(n+1)!}$$

Nous voyons que lorsque x tend vers 0, le membre de droite tend vers 0. C'est la définition de la négligeabilité, et on a donc (rappelons que n est fixé) :

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

On a donc trouvé le développement limité à l'ordre n en 0 de la fonction exponentielle. En réalité, on peut aussi écrire plus précisément :

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{x^{n+j}}{(n+j)!} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + x^n \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{x^j}{(n+j)!} = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + x^n (n!) \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{x^j}{j!} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + x^n (n!) (e^x - 1) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o_{x \rightarrow 0}(x^n) \end{aligned}$$

car la fonction $x \mapsto (n!)(e^x - 1)$ tend vers 0 quand x tend vers 0.

Remarque 1.32. L'idée d'un développement limité est d'approximer une fonction au voisinage d'un point par un polynôme. En particulier, on s'attend à ce que le développement limité d'un polynôme soit lui même.

Exemple 1.33. Soit $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{1+x}$, et soit $a = 0$. On cherche le développement limité de cette fonction à l'ordre 0, 1 et 2. A l'ordre 0 on cherche un polynôme $P_0(x)$ de degré 0 (une constante réelle) tel que l'Equation (1.3) soit satisfaite pour $n = 0$, c'est à dire $\frac{f(x) - P_0(x)}{x^0} = f(x) - P_0(x)$ converge vers 0 quand x tend vers 0. On pose donc $P_0(x) = \alpha_0$ et on veut que $f(x) - P_0(x) = \frac{1}{1+x} - \alpha_0$ converge vers 0 quand x tend vers 0. On a :

$$f(x) - P_0(x) = \frac{1}{1+x} - \alpha_0 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 - \alpha_0$$

Pour que l'équation (1.3) soit satisfaite à l'ordre 0, il faut donc que $1 - \alpha_0 = 0$ c'est à dire $\alpha_0 = 1$. On a donc $f(x) = 1 + o_{x \rightarrow 0}(1)$; c'est le développement limité de la fonction f à l'ordre 0 en $a = 0$.

Maintenant passons à l'ordre 1. On pose $P_1(x) = 1 + \alpha_1 x$ et on veut que ce polynôme satisfasse l'équation (1.3) à l'ordre 1 c'est à dire $\frac{f(x) - P_1(x)}{x^1} = \frac{\frac{1}{1+x} - (1 + \alpha_1 x)}{x}$ converge vers 0 quand x tend vers 0. On a :

$$\frac{\frac{1}{1+x} - (1 + \alpha_1 x)}{x} = \frac{\frac{1 - (1+x)}{1+x} - \alpha_1 x}{x} = \frac{\frac{-x}{1+x} - \alpha_1 x}{x} = - \left(\frac{1}{1+x} + \alpha_1 \right)$$

Donc l'Equation (1.3) est satisfaite pour $n = 1$ si le membre de droite de l'équation tend vers 0 quand x tend vers 0. On obtient donc $1 + \alpha_1 = 0$, ce qui donne $\alpha_1 = -1$. On obtient donc que $P_1(x) = 1 - x$ et $f(x) = 1 - x + o_{x \rightarrow 0}(x)$. C'est le développement de f à l'ordre 1 au point 0.

Maintenant passons à l'ordre 1. On pose $P_2(x) = 1 - x + \alpha_2 x^2$ et on veut que ce polynôme satisfasse l'Equation (1.3) à l'ordre 2 c'est à dire $\frac{f(x) - P_2(x)}{x^2} = \frac{\frac{1}{1+x} - (1-x + \alpha_2 x^2)}{x^2}$ converge vers 0 quand x tend vers 0. On a :

$$\frac{\frac{1}{1+x} - (1 - x + \alpha_2 x^2)}{x^2} = \frac{\frac{1-(1+x)+x(1+x)}{1+x} - \alpha_2 x^2}{x^2} = \frac{\frac{x^2}{1+x} - \alpha_2 x^2}{x^2} = \left(\frac{1}{1+x} - \alpha_2 \right)$$

Donc l'Equation (1.3) est satisfaite pour $n = 2$ si le membre de droite de l'équation tend vers 0 quand x tend vers 0. On obtient donc $1 - \alpha_2 = 0$, ce qui donne $\alpha_2 = 1$. On obtient donc que $P_2(x) = 1 - x + x^2$ et $f(x) = 1 - x + x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$. C'est le développement de f à l'ordre 2 au point 0. Plus généralement on aura pour tout $n \in \mathbb{N}$ le développement limité suivant :

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

On peut faire tendre n vers $+\infty$ dans l'équation précédente et on obtient un polynôme infini (une série entière) comme pour l'exponentielle :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k$$

Proposition 1.34. Soit I un intervalle ouvert non vide. Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ qui admet un DL à l'ordre n en $a \in I$, en admet un à tout ordre $0 \leq p \leq n$. D'autre part, le développement limité de f en a est unique.

Démonstration. Soit $P_n(x)$ le polynôme de degré n correspondant au développement limité à l'ordre n en a , c'est à dire que $f(x) - P_n(x) = o_{x \rightarrow a}((x-a)^n)$. Le polynôme peut s'écrire :

$$P_n(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \dots + \alpha_n(x-a)^n$$

où les α_i sont des nombres réels. Pour tout $0 \leq p \leq n$, on pose $P_p(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \dots + \alpha_p(x-a)^p$. Alors on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= P_n(x) + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n) \\ &= P_p(x) + (x-a)^p(\alpha_{p+1}(x-a) + \alpha_{p+2}(x-a)^2 + \dots + \alpha_n(x-a)^{n-p}) + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n) \end{aligned}$$

On obtient donc que :

$$\frac{f(x) - P_p(x)}{(x-a)^p} = \underbrace{(\alpha_{p+1}(x-a) + \alpha_{p+2}(x-a)^2 + \dots + \alpha_n(x-a)^{n-p})}_{\text{tend vers 0 quand } x \text{ tend vers } a} + o_{x \rightarrow a}((x-a)^{n-p})$$

Dans tous les cas le membre de droite tend vers 0 quand x tend vers a donc c'est un petit o de $(x-a)$, et on en déduit que $f(x) = P_p(x) + o_{x \rightarrow a}((x-a)^p)$. Cela montre que f admet un développement limité à l'ordre p en a .

Maintenant pour l'unicité, supposons qu'il existe un polynôme $Q_n(x) = \sum_{k=0}^n \beta_k(x-a)^k$ tel que $f(x) - Q_n(x) = o_{x \rightarrow a}((x-a)^n)$. Dans ce cas on a :

$$P_n(x) + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n) = Q_n(x) + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n)$$

et plus généralement, d'après le résultat précédent, on a que pour tout $0 \leq p \leq n$:

$$P_p(x) + \underset{x \rightarrow a}{o}((x-a)^p) = Q_p(x) + \underset{x \rightarrow a}{o}((x-a)^p) \quad (1.4)$$

Soit $p = 0$, alors $P_0(x) = \alpha_0$ et $Q_0(x) = \beta_0$, ce sont deux constantes, et nous avons par la Proposition 1.15 :

$$\alpha_0 + \underset{x \rightarrow a}{o}(1) = \beta_0 + \underset{x \rightarrow a}{o}(1) \text{ c'est à dire } \alpha_0 - \beta_0 = \underset{x \rightarrow a}{o}(1)$$

Autrement dit, par le Corollaire 1.12, nous déduisons que $\alpha_0 = \beta_0$. Soit $0 \leq p \leq n-1$ et supposons qu'on a montré que $\alpha_k = \beta_k$ pour tout $0 \leq k \leq p$. Montrons que $\alpha_{p+1} = \beta_{p+1}$. Nous avons d'après l'équation (1.4) :

$$P_p(x) + \underset{x \rightarrow a}{o}((x-a)^p) = Q_p(x) + \underset{x \rightarrow a}{o}((x-a)^p)$$

D'après l'hypothèse cela veut dire que :

$$\alpha_{p+1}(x-a)^{p+1} + \underset{x \rightarrow a}{o}((x-a)^p) = \beta_{p+1}(x-a)^{p+1} + \underset{x \rightarrow a}{o}((x-a)^{p+1})$$

Par la Proposition 1.15, nous obtenons :

$$\alpha_{p+1}(x-a)^{p+1} - \beta_{p+1}(x-a)^{p+1} = \underset{x \rightarrow a}{o}((x-a)^{p+1})$$

Ce qui donne, par la même Proposition 1.15 :

$$\alpha_{p+1} - \beta_{p+1} = \underset{x \rightarrow a}{o}(1)$$

ce qui donne que $\alpha_{p+1} = \beta_{p+1}$. La récurrence se termine au rang n donc on déduit que $P_n(x) = Q_n(x)$, d'où l'unicité du développement limité. \square

Exemple 1.35. Comme l'idée d'un développement limité est d'approcher une fonction par un polynôme, on s'attend à ce que si la fonction f est un polynôme, alors son développement limité est elle-même. Autrement dit, supposons que f est un polynôme de degré m (donc défini sur \mathbb{R} entier), qu'on note P , c'est à dire $f(x) = P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m$, et soit $a \in \mathbb{R}$. On a alors $P(x) = P(a + (x-a))$ on a donc :

$$P(x) = P(a + (x-a)) = a_0 + a_1(a + (x-a)) + a_2(a + (x-a))^2 + \dots + a_m(a + (x-a))^m$$

On peut développer toutes les parenthèses grâce au binôme de Newton, et on obtient une réécriture du polynôme $P(x)$ comme :

$$P(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \dots + \alpha_m(x-a)^m$$

avec les coefficients suivants :

$$\alpha_0 = a_0 + a_1a + a_2a^2 + \dots + a_ma^m, \quad \alpha_1 = a_1 + 2a_2a + \dots + ma_ma^{m-1}$$

et plus généralement, pour tout $0 \leq p \leq m$ on a :

$$\alpha_p = \sum_{k=p}^m \frac{k!}{(k-p)!} a_k a^{k-p}$$

Le développement limité de $f(x) = P(x)$ à l'ordre m en a doit satisfaire l'équation (1.3) pour $n = m$. On a un candidat parfait : c'est le polynôme lui même ! Le développement limité à

l'ordre m d'un polynôme de degré m est donc lui-même. Maintenant, soit $n > m$ et cherchons le développement limité de $f(x) = P(x)$ à l'ordre n en a . On cherche un polynôme $P_n(x)$ de degré *au plus* n tel que $\frac{P(x)-P_n(x)}{(x-a)^n}$ tend vers 0 quand x tend vers a . Mais dans ce cas, on peut prendre $P_n(x) = P(x)$: c'est un polynôme de degré $m < n$ donc *au plus* n , qui satisfait l'Equation (1.3) au rang n . Pour résumer, le développement limité à l'ordre n d'un polynôme $P(x)$ de degré m , avec $n > m$, est donc lui-même. On confirme l'intuition que le développement limité d'une polynôme est lui-même (si l'ordre du développement limité est plus grand que le degré du polynôme).

Maintenant on va suppose que $m \in \mathbb{N}^*$ et on regarde le cas $0 \leq n < m$. On cherche donc un polynôme $P_n(x)$ tel que $\frac{P(x)-P_n(x)}{(x-a)^n}$ tend vers 0 quand x tend vers a . Regardons l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} P(x) &= \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \dots + \alpha_m(x-a)^m \\ &= \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \dots + \alpha_n(x-a)^n \\ &\quad + \alpha_{n+1}(x-a)^{n+1} + \alpha_{n+2}(x-a)^{n+2} + \dots + \alpha_m(x-a)^m \\ &= \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \dots + \alpha_n(x-a)^n \\ &\quad + (x-a)^{n+1}(\alpha_{n+1} + \alpha_{n+2}(x-a) + \dots + \alpha_m(x-a)^{m-(n+1)}) \end{aligned}$$

Cela nous permet d'écrire :

$$\frac{P(x) - (\alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \dots + \alpha_n(x-a)^n)}{(x-a)^n} = (x-a)(\alpha_{n+1} + \alpha_{n+2}(x-a) + \dots + \alpha_m(x-a)^{m-(n+1)})$$

Le membre de droite tend vers 0 quand x tend vers a donc on a bien la relation (1.3) à l'ordre $0 \leq n < m$. Le développement limité $P_n(x)$ du polynôme P à l'ordre $0 \leq n < m$ est donc la *troncation* du polynôme P à l'ordre n :

$$P_n(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \dots + \alpha_n(x-a)^n$$

Autrement dit, le développement limité d'ordre n en a d'un polynôme $P(x)$ de degré m est lui-même si $n \geq m$, et est sa troncation au degré n si $n < m$ (une fois qu'on a récrit $P(x)$ sous la forme $P(x) = \sum_{k=0}^m \alpha_k(x-a)^k$).

Remarque 1.36. Admettre un développement limité d'ordre 0 en a revient à être continue en a . Admettre un développement limité d'ordre 1 en a revient à être dérivable en a , avec la fameuse formule (1.1). Mais admettre un développement limité d'ordre 2 ne veut PAS dire qu'on est dérivable deux fois (comme nous allons le voir maintenant).

Exemple 1.37. Définissons la fonction suivante :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} x^3 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est continue en zéro et dérivable en zéro car

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{x^3 \sin(1/x)}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} x^2 \sin(1/x) = 0$$

et sa dérivée est $f'(0) = 0$. Par contre elle n'est pas dérivable deux fois en zéro car le taux d'accroissement de la dérivée en 0 est :

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \frac{3x^2 \sin(1/x) - x \cos(x)}{x} = 3x \sin(1/x) - \cos(x)$$

Le premier terme tend vers 0 quand x tend vers zéro mais le deuxième oscille entre -1 et 1 et ne converge pas donc le taux d'accroissement n'a pas de limite en 0. Pourtant la fonction admet un développement limité à l'ordre 2 en zéro puisque si on pose $\epsilon(x) = x \sin(1/x)$ alors $f(x) = x^2 \epsilon(x)$ et ϵ tend vers 0 en 0. Donc on a $f(x) = 0 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$ ce qui nous donne $P_2(x) = 0$.

Connait-on un moyen techniquement "simple" qui nous permettrait de calculer un développement limité à tout ordre ?? Cela est possible sous certaines conditions, c'est pourquoi nous devons introduire les notions suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^0 &= \{\text{fonctions continues}\} \\ \mathcal{C}^1 &= \{\text{fonctions dérivables et dont la dérivée est continue}\} \\ \mathcal{C}^n &= \{\text{fonctions (au moins) } n \text{ fois dérivables et dont la dérivée } n\text{-ième est continue}\} \\ \mathcal{C}^\infty &= \{\text{fonctions dérivable une infinité de fois}\} \end{aligned}$$

D'habitude, on écrit $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ pour désigner les fonctions (au moins) n fois dérivables sur I à valeurs dans \mathbb{R} , et dont la dérivée n -ième est continue. Nous avons les inclusions suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^\infty \subset \dots \subset \mathcal{C}^n \subset \left\{ \begin{array}{l} \text{fonctions} \\ \text{dérivables} \\ n \text{ fois} \end{array} \right\} \subset \mathcal{C}^{n-1} \subset \dots \\ \dots \subset \mathcal{C}^2 \subset \left\{ \begin{array}{l} \text{fonctions} \\ \text{dérivables} \\ \text{deux fois} \end{array} \right\} \subset \mathcal{C}^1 \subset \left\{ \begin{array}{l} \text{fonctions} \\ \text{dérivables} \end{array} \right\} \subset \mathcal{C}^0 \subset \left\{ \begin{array}{l} \text{fonctions} \\ \text{quelconques} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Ce sont des inclusions strictes car nous avons les exemples suivants : la fonction de Heaviside est une fonction qui n'est pas continue. La fonction valeur absolue est continue mais pas dérivable en 0. La fonction de l'Exemple (1.40) est dérivable mais pas de classe \mathcal{C}^1 (sa dérivée n'est pas continue en 0). La fonction de l'Exemple (1.37) est de classe \mathcal{C}^1 mais pas dérivable deux fois en 0.

Définition 1.38. On appelle homéomorphisme une fonction réelle injective et continue dont la fonction réciproque est continue. On appelle \mathcal{C}^k -difféomorphisme une fonction injective et de classe \mathcal{C}^k dont la fonction réciproque est de classe \mathcal{C}^k .

Remarque 1.39. Le caractère injectif garanti que la fonction est une bijection entre son domaine de définition et son image, c'est ce qui est important.

Exemple 1.40. Un exemple de fonction dérivable sur \mathbb{R} mais qui n'est pas \mathcal{C}^1 est :

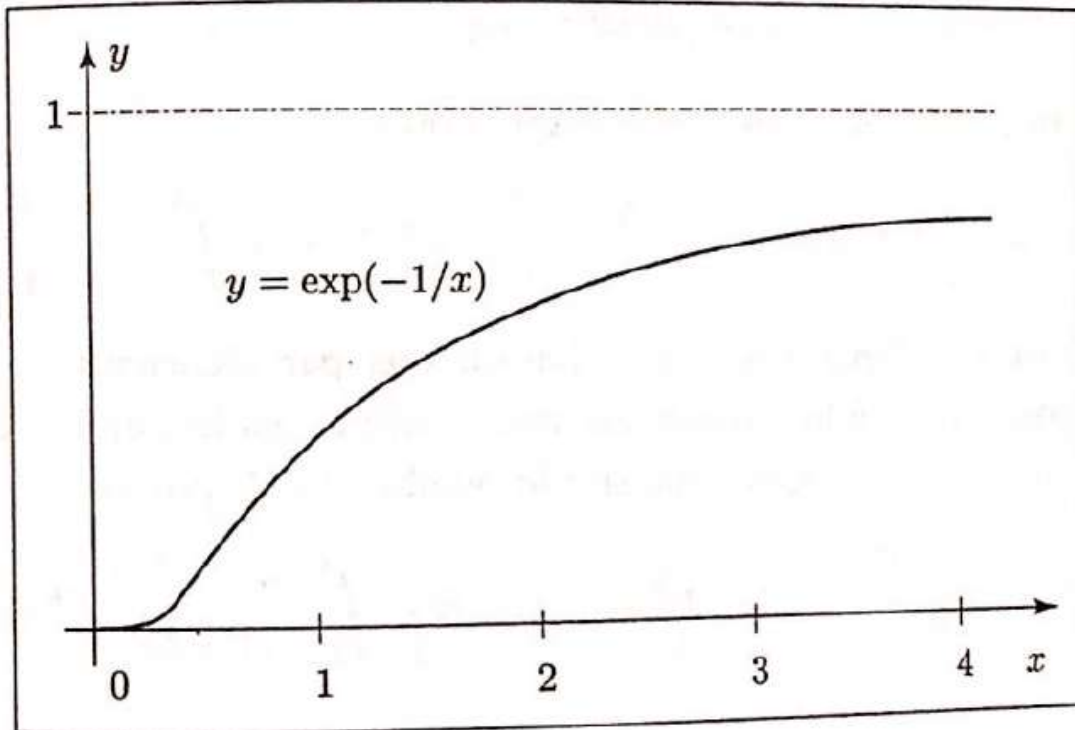
$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

D'une part, la limite en zéro de $\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est zéro donc $g'(0) = 0$. D'autre part, pour tout $a \neq 0$, on a $g'(a) = 2a \sin\left(\frac{1}{a}\right) - \cos\left(\frac{1}{a}\right)$ qui ne tend absolument pas vers 0 en 0, mais oscille comme $-\cos\left(\frac{1}{a}\right)$ (entre -1 et 1). La fonction dérivée g' n'est donc pas continue en 0.

Exemple 1.41. Un exemple de fonction de classe \mathcal{C}^∞ sont toutes les fonctions usuelles (hors la racine carrée en 0), et aussi les deux fonctions plus compliquées suivantes (la première vient de Cauchy en 1823) :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Ces deux fonctions sont visiblement infiniment dérivables sur \mathbb{R}^* , et d'autre part on peut calculer leur nombre dérivé en 0 et observer que ça vaut zéro dans les deux cas, tout comme toutes les nombres dérivés d'ordre supérieur. On peut en trouver la preuve (compliquée) pour la deuxième fonction dans la Section 2 du Chapitre 11 du Liret-Martinais.



Proposition 1.42. Formule de Taylor-Young. Soit I un intervalle ouvert non vide, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^n et $a \in I$. Alors le développement limité d'ordre n de f au voisinage de a est donné par la formule suivante :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n)$$

Autrement dit $P_n(x) = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!}$.

Démonstration. La différence avec la Formule de Taylor-Lagrange est que la dérivée n -ième est supposée continue. Cela sera donc central pour la preuve de la formule de Taylor-Young. On part de la formule de Taylor-Lagrange, pour $b = x > a$ (même démo pour $x < a$). Il existe $c_x \in]a, x[$ tel que la formule de Taylor-Lagrange 1.23 est satisfaite. Le dernier terme avec c dans la formule de Taylor-Lagrange peut se récrire (avec c_x ici) :

$$\frac{f^{(n)}(c_x)}{n!}(x-a)^n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{(x-a)^n}{n!} \left(f^{(n)}(c_x) - f^{(n)}(a) \right)$$

Il suffit de montrer que le terme $f^{(n)}(c_x) - f^{(n)}(a)$ tend vers 0 lorsque x tend vers a . Cela est vrai car $a < c_x < x$ et donc que si $x \rightarrow a$ alors $c_x \rightarrow a$ mais $f^{(n)}$ est continue par hypothèse donc banco. \square

Remarque 1.43. La Proposition 1.42 dit que si la fonction f est de classe \mathcal{C}^n dans un voisinage de a , alors les coefficients du développement limité sont connus et uniquement déterminés jusqu'à l'ordre n . Attention à ce qu'elle ne dit pas :

- il existe des fonctions qui ne sont pas dérivables à l'ordre n en a mais qui admettent un développement limité à l'ordre n comme on a vu à l'ordre 2 dans l'Exemple 1.37 ;
- il existe des fonctions qui ont les mêmes développements limités à n'importe quel ordre en un point, mais qui ne sont pas identiques, comme on a vu dans l'Exemple 1.41.

Exemple 1.44. On retrouve grâce à la Proposition 1.42 le développement limité à l'ordre n en 0 de la fonction exponentielle. On a $\exp^{(k)}(x) = \exp(x) = e^x$ donc en $x = 0$ on a $\exp^{(k)}(0) = e^0 = 1$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$ comme on a obtenu dans l'Exemple 1.31.

Exemple 1.45. Retrouvons le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ de l'Exemple 1.33. La dérivée première vaut $f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$ et la dérivée seconde vaut $f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$. On a donc $f(0) = 1$, $f'(0) = -1$ et $f''(0) = 2$. La formule de Taylor-Young nous donne donc :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}(x-0) + \frac{f''(0)}{2}(x-0)^2 + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^2) = 1 - x + x^2 + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^2)$$

C'est donc bien le polynôme d'ordre 2 qu'on avait laborieusement calculé. La formule de Taylor-Young est donc extrêmement efficace !

Exemple 1.46. Cas particuliers de fonctions de classe \mathcal{C}^∞ :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Comme toutes leurs dérivées sont nulles en 0, leur développement limité respectif est $f(x) = \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^n)$ et $g(x) = \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^n)$ à tout ordre n . C'est à dire que leur développement limité est le même, et le même que la fonction nulle.

Comme le montre l'exemple 1.46, les développements limités en un point a ne permettent pas de différencier certaines fonctions différentes, même si elles sont infiniment différentiables et qu'on obtient l'unique développement limité à l'aide de la formule de Taylor-Young. En résumé, connaître un développement limité d'une fonction de classe \mathcal{C}^∞ à n'importe quel ordre au point a ne donne pas forcément toute l'information sur cette fonction en a . Cependant il existe des fonctions dont la connaissance de leur développement limité à tout ordre en a contient toutes les informations sur ces fonctions au point a . On les appelle *fonctions analytiques en a* : ce sont des fonctions infiniment dérivables – donc satisfaisant la formule de Taylor-Young à n'importe quel ordre – mais qui ne contiennent pas plus d'information que leur développement limité (à l'ordre infini). Elles s'écrivent donc comme la limite $n \rightarrow \infty$ de leur développement limité, c'est à dire la somme infinie suivante :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!}$$

Les fonctions analytiques en a sont donc des polynômes infinis, c'est à dire ce qu'on appelle des *séries*. Une fonction analytique en tout point de son domaine de définition est dite analytique, et on note leur ensemble \mathcal{C}^ω . Les polynômes en font naturellement partie. Nous avons donc les inclusions suivantes :

$$\{\text{polynômes}\} \subset \mathcal{C}^\omega \subset \mathcal{C}^\infty \subset \dots \subset \mathcal{C}^1 \subset \left\{ \begin{array}{l} \text{fonctions} \\ \text{dérivables} \end{array} \right\} \subset \mathcal{C}^0 \subset \left\{ \begin{array}{l} \text{fonctions} \\ \text{quelconques} \end{array} \right\}$$

Soit f et g deux fonctions admettant un développement limité à l'ordre n en a . En posant $h = x - a$, on a les deux expressions suivantes :

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^n \alpha_k h^k + \underset{h \rightarrow 0}{o}(h^n) \quad \text{et} \quad g(a+h) = \sum_{k=0}^n \beta_k h^k + \underset{h \rightarrow 0}{o}(h^n)$$

$\exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x)$
$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x)$
$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + x^{2n} \varepsilon(x)$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x)$
$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + x^{2n} \varepsilon(x)$
$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots$ $+ \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + x^n \varepsilon(x)$
$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + x^n \varepsilon(x)$
$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + x^n \varepsilon(x)$
$\operatorname{Log}(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \dots - \frac{x^n}{n} + x^n \varepsilon(x)$
$\operatorname{Log}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + x^n \varepsilon(x)$
$\operatorname{Arc} \operatorname{tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + x^{2n} \varepsilon(x)$
$\operatorname{Arc} \sin x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \frac{x^7}{7} + \dots$ $+ \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+2} \varepsilon(x)$

FIGURE 2 – Développement limités à l'ordre n des fonctions usuelles (les apprendre par coeur sauf le dernier).

pour des réels fixés α_k et β_k . Alors nous avons les deux développements limités à l'ordre n de la somme $f + g$ et du produit fg :

$$(f + g)(a + h) = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=0}^k \alpha_j + \beta_{k-j} \right) h^k + o_{h \rightarrow 0}(h^n)$$

$$(fg)(a + h) = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=0}^k \alpha_j \beta_{k-j} \right) h^k + o_{h \rightarrow 0}(h^n)$$

Le produit croisé à droite est appelé *produit de Cauchy*. Attention, si la fonction f possède un développement limité à l'ordre p et si la fonction g possède un développement limité à l'ordre q , avec $p < q$, alors la somme $f + g$ et le produit fg admettent un développement limité à l'ordre p , mais pas forcément à l'ordre q ! La règle : on doit respecter l'ordre le plus bas.

Soit f une fonction admettant un développement limité à l'ordre n en a , et g une fonction admettant un développement limité à l'ordre n en $f(a)$. En posant $u = x - a$ et $v = x - f(a)$, on a les deux expressions suivantes :

$$f(a + u) = f(a) + \sum_{k=1}^n \alpha_k u^k + o_{u \rightarrow 0}(u^n) \quad \text{et} \quad g(f(a) + v) = g(f(a)) + \sum_{k=1}^n \beta_k v^k + o_{v \rightarrow 0}(v^n)$$

Pour tout $1 \leq p \leq n$, on pose $P_p(u) = \sum_{k=1}^p \alpha_k u^k$. Alors la composée $g \circ f$ admet un développement limité à l'ordre n en a obtenu en remplaçant v par $P_n(u)$ dans le développement limité de la fonction g , et en développant les puissances en ne conservant que les puissances de u de degré inférieur ou égal à n . Donc en particulier dans les calculs on peut écrire $(P_{n-k+1}(u))^k$ au lieu de $(P_n(u))^k$ car on sait que plein de puissances de u vont être de degré supérieur à n après avoir élevé $P_n(u)$ à la puissance k :

$$\sum_{k=1}^n \beta_k (P_{n-k+1}(u))^k = \beta_1 \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j u^j \right) + \beta_2 \left(\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j u^j \right)^2 + \dots + \beta_{n-1} (\alpha_1 u + \alpha_2 u^2)^{n-1} + \beta_n (\alpha_1 u)^n$$

En développant et en regroupant les termes puissance par puissance, on a donc :

$$(g \circ f)(a + u) = g(f(a)) + \beta_1 \alpha_1 u + (\beta_1 \alpha_2 + \beta_2 (\alpha_1)^2) u^2 + (\beta_1 \alpha_3 + 2\beta_2 \alpha_1 \alpha_2 + \beta_3 (\alpha_1)^3) u^3 + \dots$$

$$+ \left(\beta_1 \alpha_n + \beta_2 \sum_{i+j=n} \alpha_i \alpha_j + \dots + \beta_{n-1} (\alpha_1)^{n-2} \alpha_2 + \beta_n (\alpha_1)^n \right) u^n + o_{u \rightarrow 0}(u^n)$$

Il ne faut pas apprendre la formule, mais plutôt la technique, en s'entraînant sur des exemples. Voir le Chapitre 13 du Liret-Martinais pour mieux comprendre les calculs dans le détail.

Exemple 1.47. Le développement limité de $\exp(\sqrt[3]{1+x} - 1)$ à l'ordre 2 en 0 est $1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{18} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$.

Exemple 1.48. Le développement limité de $\sqrt[3]{1+6x-5x^3}$ à l'ordre 2 en 0 est $1 + 2x - 4x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$.

Grâce aux développements limités, nous pouvons étudier plus en détails les fonctions réelles.

Exemple 1.49. Par exemple, quel est le signe de la fonction $f : x \mapsto e\sqrt{x} - e^x = e(\sqrt{x} - e^{x-1})$ quand x tend vers 1 ? On pose $h = x - 1$ alors nous avons les développements limités suivant à l'ordre 1 :

$$\sqrt{x} = \sqrt{1+h} = 1 + \frac{h}{2} + o_{h \rightarrow 0}(h) \quad \text{et} \quad e^h = 1 + h + o_{h \rightarrow 0}(h)$$

Cela donne donc grâce à la Proposition 1.15 :

$$f(1+h) = e \left(1 + \frac{h}{2} - (1+h) + \underset{h \rightarrow 0}{o}(h) \right) = -e \frac{h}{2} + \underset{h \rightarrow 0}{o}(h)$$

Comme $h = x - 1$, on voit sur le membre de droite que le signe de la fonction f quand x tend vers 1 dépend de si on tend vers 1 par la gauche ou la droite : à cause du signe $-$ devant la fraction, on a $f(x) < 0$ si $x > 1$ et $f(x) > 0$ si $x < 1$.

Le développement limité permet d'aller plus loin dans l'étude locale des fonctions, puisque on a à l'ordre 3 :

$$f(x) = f(a) + \alpha(x-a) + \beta(x-a)^2 + \gamma(x-a)^3 + \underset{x \rightarrow a}{o}((x-a)^3)$$

Le développement limité à l'ordre 1 nous donne l'équation de la tangente au graphe de f au point $(a, f(a))$, le terme d'ordre 2 nous donne la position du graphe par rapport à la tangente et le terme d'ordre 3 nous dit si on a un point d'inflexion si jamais le terme d'ordre 2 est nul. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle et $a \in D$ en lequel f admet un développement limité.

1. si le développement limité de f à l'ordre 1 en a est $f(x) = f(a) + \alpha(x-a) + \underset{x \rightarrow a}{o}(x-a)$ alors f est dérivable en a , $\alpha = f'(a)$ et l'équation de la tangente au graphe de f au point a est $y = f(a) + f'(a)(x-a)$;
2. si le développement limité de f à l'ordre 2 en a est $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \beta(x-a)^2 + \underset{x \rightarrow a}{o}((x-a)^2)$, et si $\beta > 0$ (resp. $\beta < 0$), alors f est au dessus (resp. en dessous) de la tangente d'équation $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ dans un voisinage de a . En particulier, si $f'(a) = 0$ c'est à dire si a est un point critique, le développement limité de f à l'ordre 2 en a est $f(x) = f(a) + \beta(x-a)^2 + \underset{x \rightarrow a}{o}((x-a)^2)$, et si $\beta > 0$ (resp. $\beta < 0$), alors $(a, f(a))$ est un minimum (resp. maximum) local de la fonction f ;
3. si le développement limité de f à l'ordre 3 en a est $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \gamma(x-a)^3 + \underset{x \rightarrow a}{o}((x-a)^3)$, et si $\gamma \neq 0$, alors le point $(a, f(a))$ est un point d'inflexion du graphe de f .

Remarque 1.50. Avoir un développement limité d'ordre 2 en un point du type $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \beta(x-a)^2 + \underset{x \rightarrow a}{o}((x-a)^2)$ avec $\beta \neq 0$ ne veut pas dire que la fonction est convexe (ou concave) dans un voisinage de ce point, comme l'illustre la fonction $f(x) = -\frac{x^2}{2} - x^4 \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)$. Cette fonction n'est ni convexe ni concave dans tout voisinage de l'origine, mais elle admet un maximum en l'origine (avec une tangente horizontale en ce point donc).

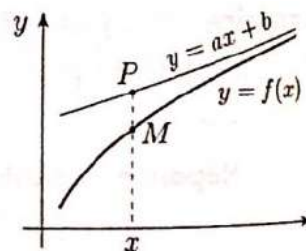
Remarque 1.51. En réalité pour l'item 2. on peut avoir un développement limité du type $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \beta(x-a)^q + \underset{x \rightarrow a}{o}((x-a)^q)$, avec q pair, et ça ne change rien au résultat. Pour l'item 3. on peut avoir un développement limité du type $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \gamma(x-a)^q + \underset{x \rightarrow a}{o}((x-a)^q)$, avec q impair, et ça ne change rien au résultat. On voit donc qu'un point d'inflexion est caractérisé par le fait que la dérivée seconde s'annule et change de signe en a , cette dernière propriété étant importante.

Définition 1.52. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle, soit $a \in D$, et soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors :

1. si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$, on dit que la droite verticale d'équation $x = a$ est une asymptote verticale au graphe de f ;
2. si $f(x) = \alpha x + \beta + \underset{x \rightarrow +\infty}{o}(1)$ on dit que la droite d'équation $y = \alpha x + \beta$ est une asymptote au graphe de f en $+\infty$;
3. si $f(x) = \alpha x + \beta + \underset{x \rightarrow -\infty}{o}(1)$ on dit que la droite d'équation $y = \alpha x + \beta$ est une asymptote au graphe de f en $-\infty$;

4. dans les deux dernier cas, si $\alpha = 0$ on dit que l'asymptote est horizontale.

Soit P le point d'abscisse x sur la droite d'équation $y = ax + b$ et soit M le point $(x, f(x))$. La différence $f(x) - (ax + b)$ est la mesure algébrique \overline{PM} . Dire que la droite est asymptote à f quand x tend vers $+\infty$ signifie que \overline{PM} tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.



Remarque 1.53. Les items 2 et 3 peuvent se récrire comme suit : 2. la droite d'équation $y = \alpha x + \beta$ est une *asymptote* au graphe de f en $+\infty$ si $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (\alpha x + \beta)) = 0$, 3. la droite d'équation $y = \alpha x + \beta$ est une *asymptote* au graphe de f en $-\infty$ si $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (\alpha x + \beta)) = 0$.

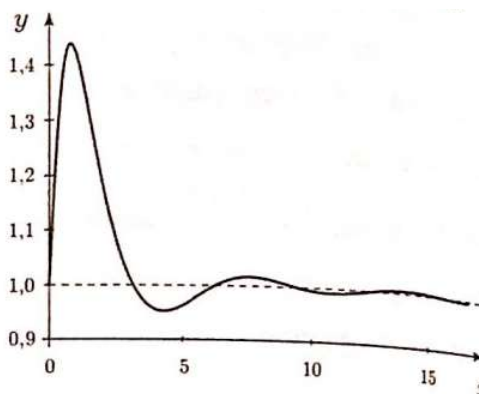
Exemple 1.54. Un exemple très simple de fonction qui admet une asymptote en $\pm\infty$ est la fonction $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$. C'est une fonction qui admet l'asymptote d'équation $y = 0$ en $\pm\infty$.

Proposition 1.55. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. La droite d'équation $y = \alpha x + \beta$ est asymptote au graphe de f en $+\infty$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \alpha x) = \beta$$

Remarque 1.56. Ainsi en général pour trouver une asymptote en $\pm\infty$, on calcule d'abord la limite du rapport $\frac{f(x)}{x}$ quand x tend vers $\pm\infty$. La position du graphe de f par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de la différence $f(x) - (\alpha x + \beta)$.

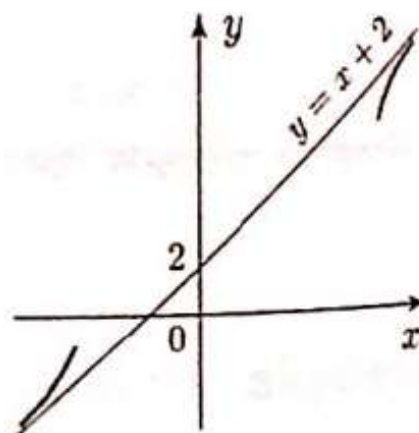
Exemple 1.57. Prenons comme fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1 + \frac{\sin(x)}{1+x^2}$. Puisque $|\sin(x)| \leq 1$, on a que le deuxième terme de la fonction tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Le graphe de f admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = 1$. La différence $f(x) - 1 = \frac{\sin(x)}{1+x^2}$, bien que de plus en plus petite, a le signe de $\sin(x)$ donc change de signe une infinité de fois quand x tend vers l'infini. L'extrémité droite du graphe oscille de part et d'autre de l'asymptote quand on s'éloigne de l'origine (à gauche comme à droite).



Exemple 1.58. Prenons comme fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt[3]{x^3 + 6x^2} - 5$ et on s'intéresse aux asymptotes de f en $\pm\infty$. Supposons $x \neq 0$, alors on peut écrire $f(x) = x \sqrt[3]{1 + \frac{6}{x} - \frac{5}{x^3}}$. Quand x tend vers $\pm\infty$, la fraction $\frac{1}{x}$ tend vers 0 donc on peut faire un développement limité qu'on a déjà calculé dans l'Exemple 1.48 :

$$f(x) = x + 2 - \frac{4}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Nous voyons que l'équation de l'asymptote, en $+\infty$ comme en $-\infty$, est $y = x + 2$, et que le graphe est au dessus (resp. au dessous) de l'asymptote en $+\infty$ (resp. $-\infty$).

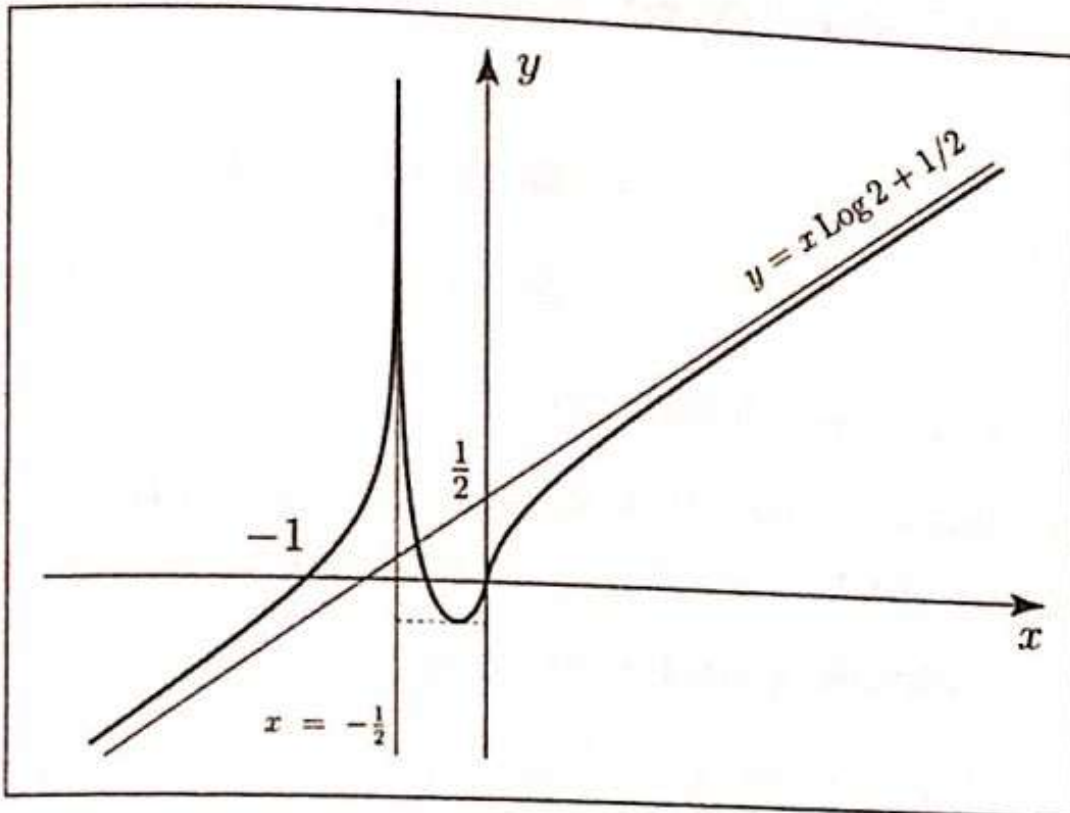


Grâce à ces nouveaux outils, nous pouvons étudier en profondeur les fonctions. Cela se fait donc en suivant le protocole suivant :

1. trouver le domaine de définition de la fonction étudiée $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$;
2. trouver les limites aux bornes du domaine de définition ;
3. si la fonction n'a pas de limite en $\pm\infty$, chercher les possibles asymptotes ;
4. étudier la dérivabilité de f : calculer la fonction dérivée là où c'est possible, et sinon utiliser la définition usuelle du nombre dérivée (limite du taux d'accroissement) ;
5. trouver les zéros de f' et le signe de f' sur le domaine de définition ;
6. éventuellement calculer la dérivée seconde f'' pour déterminer les points d'inflexions ;
7. dresser le tableau de variation de la fonction f et son graphe.

Exemple 1.59. Voici le tableau de variation et le graphe de la fonction $f : x \mapsto \ln \left| 2 + \frac{1}{x} \right|$ faite en détail pages 251-255 du Liret-Martinais.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	α	0	$+\infty$
f'	+	-	0	+	+
f	$-\infty$	$+\infty$	$f(\alpha)$	0	$+\infty$



1.3 Courbes paramétrées

Le graphe d'une fonction est une courbe dans le plan \mathbb{R}^2 . C'est une courbe d'un type particulier : elle est définie par l'ensemble des points (x, y) du plan tels que $y = f(x)$. Lorsque x augmente, le point $(x, f(x))$ parcourt le graphe de f de la gauche vers la droite. C'est un cas particulier d'un type de courbe qu'on appelle *courbes paramétrées* : ce sont les courbes du plan qu'on parcourt avec un paramètre (en général qu'on note t comme le temps en physique). La façon la plus générale de définir une courbe paramétrée dans le plan est la suivante (et attention, le mot *courbe* ne veut pas dire que la ligne paramétrée n'a pas d'angle, c'est juste un terme mathématique) :

Définition 1.60. Soit I un intervalle de \mathbb{R} ou une union finie d'intervalles. On appelle fonction vectorielle toute application $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui associe à tout élément $t \in I$ un point du plan $\gamma(t)$. On appelle fonctions coordonnées – ou fonctions composantes – de γ les deux fonctions réelles $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ définies par :

$$\forall t \in I, \quad \gamma(t) = (x(t), y(t))$$

On appelle support de γ le sous-ensemble de \mathbb{R}^2 défini comme l'image de γ . La fonction vectorielle $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ est dite :

- continue en $t_0 \in I$ (resp. sur I) si ses fonctions coordonnées sont continues en t_0 (resp. sur I) ;
- dérivable en $t_0 \in I$ (resp. sur I) si ses fonctions coordonnées sont dérivables en t_0 (resp. sur I) et on a :

$$\gamma'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$$

- de classe \mathcal{C}^n sur I si ses fonctions coordonnées sont de classe \mathcal{C}^n sur I , et on a :

$$\gamma^{(n)}(t) = (x^{(n)}(t), y^{(n)}(t))$$

On appelle courbe paramétrée – ou arc paramétré – de classe \mathcal{C}^n toute fonction vectorielle de classe \mathcal{C}^n . Si on ne précise pas la classe, on suppose qu'elle est au moins continue.

Remarque 1.61. Les fonctions coordonnées de γ dépendent évidemment du choix de base pour l'espace \mathbb{R}^2 . La définition que nous avons donnée est relativement à la base canonique de \mathbb{R}^2 . Si on change de base, le point $\gamma(t)$ ne change pas mais les coordonnées du point changent. Autrement dit l'expression de l'arc paramétré dépend de la base mais pas son support (la figure géométrique). D'autre part, la notion de continuité et de dérivabilité ne dépendent pas du choix de base.

Exemple 1.62. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle. On définit la fonction vectorielle suivante :

$$\begin{array}{ccc} \gamma_f : I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (t, f(t)) \end{array}$$

Le support de la fonction vectorielle γ_f est précisément le graphe de la fonction f . Elle est continue si f est continue, dérivable si f est dérivable, etc. Lorsque f est dérivable, la fonction f est continue donc la fonction vectorielle γ_f est continue donc c'est une courbe paramétrée, et γ_f admet une dérivée $\gamma'_f(t) = (1, f'(t))$. En particulier cela veut dire que là où f est dérivable, la dérivée de la courbe paramétrée γ_f ne s'annule jamais. On peut écrire la dérivée de γ_f sous forme vectorielle : $\vec{\gamma}'_f(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix}$, c'est le vecteur directeur de la droite tangente au graphe de f au point $\gamma_f(t) = (t, f(t))$.

Remarque 1.63. En vérité, et de façon plus générale, les dérivées premières, secondes, etc. de la courbe paramétrée γ sont des *vecteurs*, c'est à dire qu'on devrait écrire :

$$\vec{\gamma}'(t_0) = \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{\gamma}^{(n)}(t_0) = \begin{pmatrix} x^{(n)}(t_0) \\ y^{(n)}(t_0) \end{pmatrix}$$

Nous ne le faisons pas pour l'instant pour faciliter la compréhension, mais nous le ferons plus bas pour comprendre la géométrie des arcs paramétrés. Remarquons que la dérivée première joue le rôle de la vitesse de parcours de l'arc paramétré.

Exemple 1.64. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et soit $R > 0$. On définit l'arc paramétré suivant :

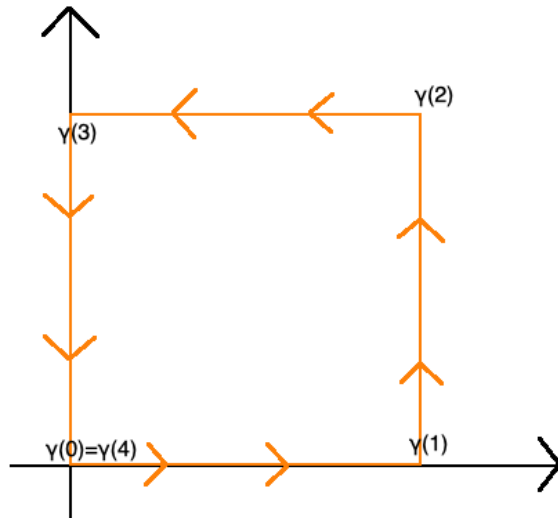
$$\begin{aligned} \gamma : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (a + R\cos(t), b + R\sin(t)) \end{aligned}$$

La support de la fonction γ est le cercle de rayon R et de centre (a, b) . Notons qu'on peut prendre comme intervalle de définition \mathbb{R} , le cercle ne change pas, mais dans ce cas on passe une infinité de fois par le même point. Par contre, on peut prendre $[\alpha, \alpha + 2\pi]$, pour n'importe quel $\alpha \in \mathbb{R}$, si on veut que γ soit injectif, sauf en α où γ passe deux fois.

Exemple 1.65. Dans ce exemple proposé par Ata, on définit l'arc paramétré suivant :

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 4] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \begin{cases} (t, 0) & \text{si } t \in [0, 1] \\ (1, t-1) & \text{si } t \in [1, 2] \\ (3-t, 1) & \text{si } t \in [2, 3] \\ (0, 4-t) & \text{si } t \in [3, 4] \end{cases} \end{aligned}$$

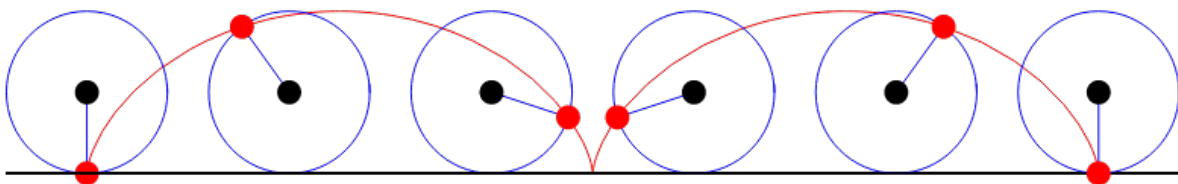
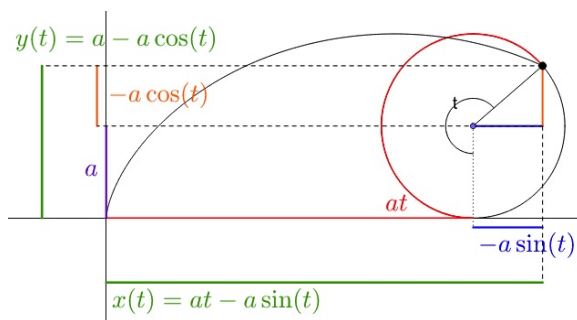
Cette courbe paramétrée définit un carré dont le coin en bas à gauche est l'origine $(0, 0)$ et chaque autre coin est atteint une fois au temps $t = 1$, $t = 2$ et $t = 3$, avant de revenir à l'origine en $t = 4$.



Exemple 1.66. Soit $a > 0$. On définit la courbe paramétrée de classe \mathcal{C}^∞ suivante :

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (at - a\sin(t), a - a\cos(t)) \end{aligned}$$

On appelle cette fonction vectorielle une *cycloïde* (de rayon a), et son support est obtenu en suivant des yeux la valve d'une roue de vélo.



Remarque 1.67. La cycloïde est une courbe très importante dans l'histoire du calcul infinitésimal et de la physique car elle encode la *brachistochrone*, c'est à dire la courbe de temps minimale

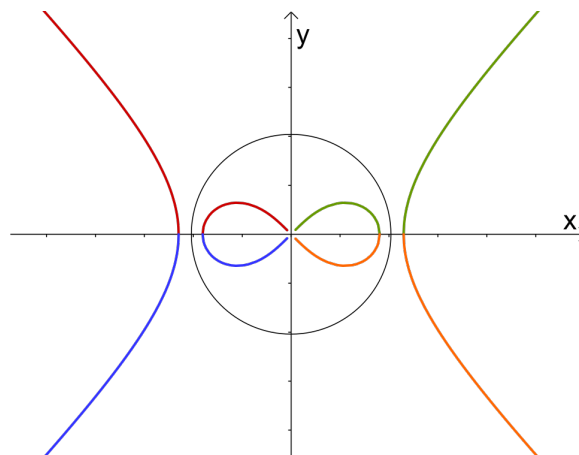
pour une bille de passer d'un point à un autre sous l'effet de la gravité pure. Je partage ici un passage du livre *The Principle of Least Action* by A. Rojo and A. Bloch (pp. 51-52) sur l'existence de cette courbe :

« At the end of the seventeenth century, prominent mathematicians gravitated towards problems formulated in terms of maxima and minima. The interest germinated from a combination (of uncertain proportions) of aesthetic preferences, theological reasons, and the sheer allure of mathematical challenges. The most famous of such problems appears in a letter of June 9, 1696, 1 from John Bernoulli to his friend Gottfried Leibniz : “Given two points A and B in a vertical plane, find the path AMB down which a moveable point M must, by virtue of its weight, fall from A to B in the shortest possible time” (Leibniz, 1962 ; Orío, 2009). In just a week, on June 16, Leibniz wrote back with the solution, adding that he solved the problem against his will, but that he was attracted to its beauty like Eve before the apple. He expressed his solution in the form of a differential equation, and proposed to name the curve tachystoptota (curve of quickest descent). Bernoulli responded a few days later taking up the biblical reference. He was “very happy about this comparison provided that he was not regarded as the snake that had offered the apple” (Knobloch, 2012). Bernoulli points out that Leibniz’s solution corresponds to the cycloid (the curve traced out by a point on the rim of a circle rolling on a flat plane) and proposed to name the curve brachistochrone. The cycloid was admired by Galileo “as a very gracious curve to be adapted to the arches of a bridge” (Drake, 1978, p. 406) and was proven by Huygens (1673) to correspond to the isochronous pendulum. In the meantime, Bernoulli had already communicated the problem as a challenge to Rudolf Christian von Bodenhausen in Florence, in Switzerland to his brother Jacob Bernoulli, and in France to Pierre Varignon. In his response to Leibniz, John Bernoulli mentions two solutions. The first is similar to Leibniz’s. The second uses a clever map from the swiftest path to the problem of finding the trajectory of a light ray propagating in a medium of continuously varying index of refraction. This mapping is a hallmark of the optical – mechanical analogy, which had a profound influence in later formulations of mechanics. In the nineteenth century, the analogy was used by William Rowan Hamilton, and in the twentieth century it played a fundamental role in the formulation of wave mechanics by Louis de Broglie and Erwin Schrödinger. Bernoulli published his challenge in the December issue of the *Acta Eruditorum* and announced that he would suppress his own solution until Easter 1697. The May 1697 issue of the *Acta Eruditorum* contained an introductory historical paper by Leibniz on the brachistochrone. Leibniz omits his own solution because it corresponded, he said, with the other solutions. The five solutions submitted by John, Jacob Bernoulli, the Marquis de l’Hospital, Ehrenfried Walther von Tschirnhaus, and Isaac Newton were published. Newton had not revealed his name ; John Bernoulli recognized the author, “from the claw of the lion.” »

Exemple 1.68. Soit $0 < a < 1$. Le Lemniscate de Bernoulli est une courbe paramétrée par :

$$\begin{aligned} \gamma :]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[&\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \left(a \frac{\cos(t)}{1 + \sin(t)^2}, a \frac{\sin(t)\cos(t)}{1 + \sin(t)^2} \right) \end{aligned}$$

L'équation algébrique du Lemniscate est $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$. Le Lemniscate a la propriété d'être l'inversion, par rapport au cercle de rayon 1, des deux branches d'hyperboles colorées.

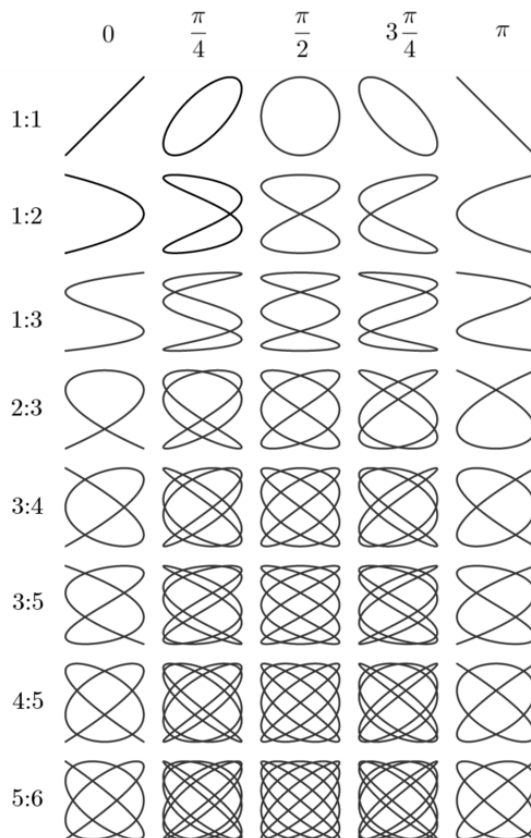


Exemple 1.69. Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $\phi > 0$. On définit la courbe de Lissajous-Bowditch de paramètres (m, n, ϕ) à partir de l'équation paramétrique suivante :

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (\cos(mt), \cos(nt - \phi)) \end{aligned}$$

Plusieurs motifs de cette famille de courbes de Lissajous sont illustrés à droite en fonction du rapport $\frac{n}{m}$ et de la valeur de ϕ (à un signe $-$ global près). Le rapport $\frac{n}{m}$ nous dit que la figure de Lissajous correspondante contient n lobes verticaux et m lobes horizontaux. Si $\phi = 0$ ou $\phi = \pi$ la courbe n'est pas fermée. On observe que dans beaucoup de cas, il y a des points d'auto-intersection de la courbe.

Ce genre de courbes est observé sur les oscilloscopes en électronique, mais aussi dans le monde du design pour ses formes harmonieuses. Le logo de Meta (Facebook) est une courbe de Lissajous, rappelant la forme d'un M majuscule : $m = 1, n = 2, \phi = \frac{7\pi}{20}$.



Nous voyons que les graphes de fonctions continues sont des courbes paramétrées particulières : elles sont paramétrées par l'abscisse. Maintenant, il existe des courbes paramétrées qui ne sont pas des graphes de fonctions continues, mais qui peuvent être localement décrites comme des graphes de fonctions continues, quitte à changer de base ou faire tourner la courbe dans le plan. Le cercle et le carré en font partie. Il existe des courbes paramétrées qui ne peuvent pas être décrites partout localement comme des graphes de fonctions continues, ce sont toutes les courbes qui ont une auto-intersection. Le Lemniscate de Bernoulli ou les courbes de Lissajous en font partie. On a donc les inclusions suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{graphes de} \\ \text{fonctions} \\ \text{continues} \end{array} \right\} \subset \left\{ \begin{array}{l} \text{courbes qui sont partout localement} \\ \text{des graphes de fonctions continues} \end{array} \right\} \subset \left\{ \begin{array}{l} \text{courbes qui ne sont pas partout localement} \\ \text{des graphes de fonctions continues} \end{array} \right\}$$

Une question légitime qui se pose est : à quelle condition une courbe paramétrée est localement le graphe d'une fonction continue. Cette question sera répondue en deuxième année.

Comme pour les fonctions, nous pouvons étudier le comportement asymptotique des courbes paramétrées. Soit I un intervalle ou une union finie d'intervalles, et soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ un arc paramétré. On dit que le support de γ admet une *branche infinie* en t_0 lorsque :

$$x(t)^2 + y(t)^2 \xrightarrow[t \neq t_0]{t \rightarrow t_0} +\infty$$

Cela veut dire que la branche en question s'éloigne à l'infini lorsque le paramètre tend vers t_0 . On dit que le support de γ admet une *asymptote verticale* en t_0 si les fonctions coordonnées de l'arc paramétré satisfont :

$$x(t) \xrightarrow[t \neq t_0]{t \rightarrow t_0} x(t_0) \quad \text{et} \quad y(t) \xrightarrow[t \neq t_0]{t \rightarrow t_0} \pm\infty$$

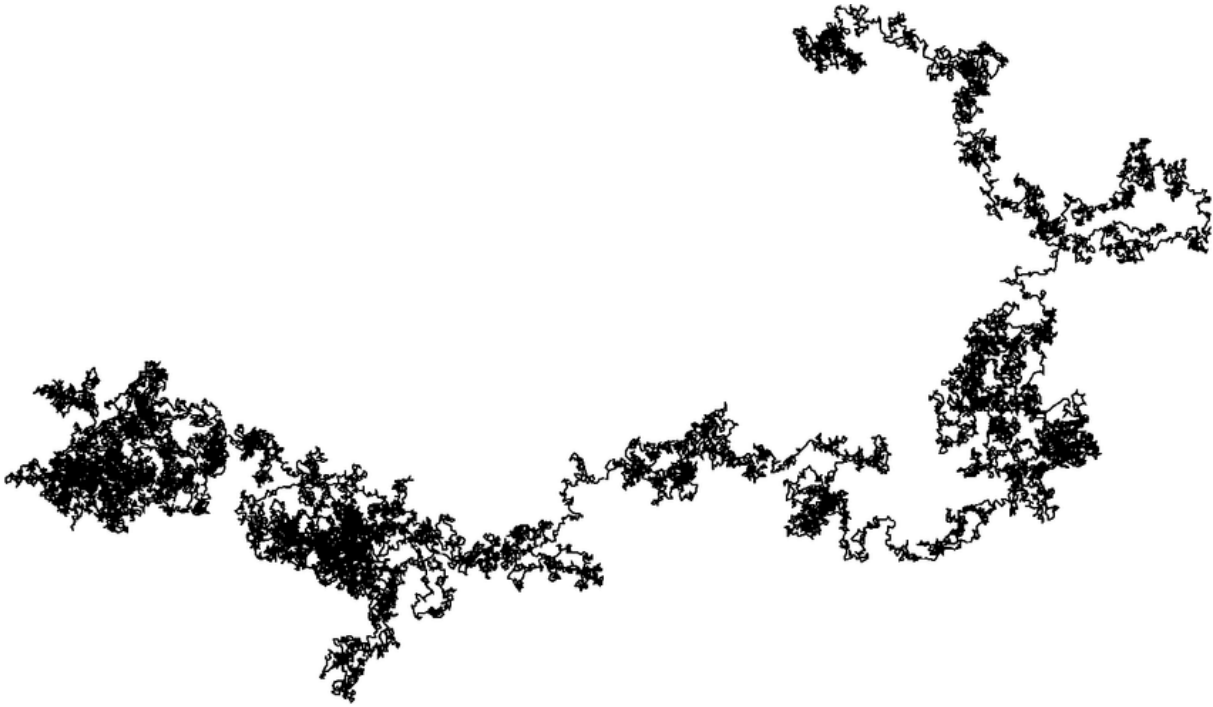


FIGURE 3 – Attention, une courbe paramétrée \mathcal{C}^0 n'est pas forcément aussi "simple" que celles qu'on a vues avant (ce sont en réalité des cas particuliers). Il existe toute une partie des courbes paramétrées continues qui ne sont pas dérivables, par exemple les courbes définies par un mouvement brownien (mouvement d'une particule ou cellule dans un liquide).

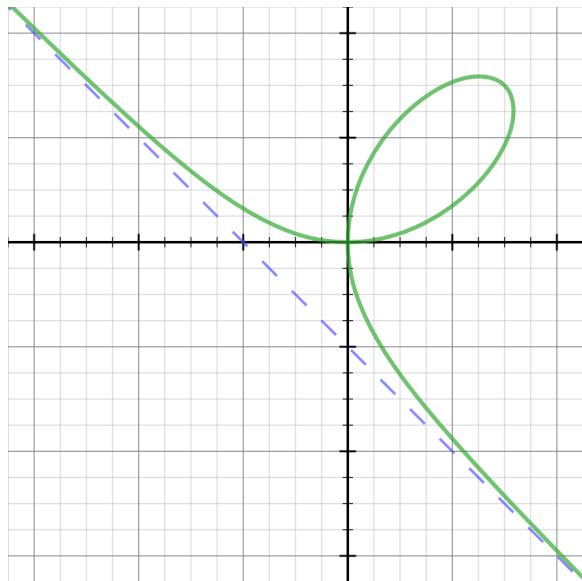
On dit que le support de γ admet une *asymptote d'équation* $y = \alpha x + \beta$ en t_0 si les fonctions coordonnées de l'arc paramétré satisfont :

$$y(t) = \alpha x(t) + \beta + o_{t \rightarrow t_0}(t)$$

Exemple 1.70. La folium de Descartes est défini par la courbe paramétrée suivante :

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} \setminus \{-1\} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3} \right) \end{aligned}$$

C'est une courbe définie sur l'union de deux intervalles ouverts : $] - \infty, -1[$ et $] - 1, +\infty[$. La branche du quadrant inférieur droit est couverte par $t < -1$; la branche dans le quadrant supérieur gauche est couverte par $-1 < t < 0$; la boucle est couverte par $t > 0$, et on passe par $(0,0)$ en $t = 0$. Une équation algébrique du folium est $x^3 + y^3 - 3xy = 0$. Une asymptote au support de γ en $t = -1$ est la droite d'équation $y = -x - 1$.



Remarque 1.71. Le folium de Descartes de l'Exemple 1.70 est le premier indice que nous pouvons voir le plan \mathbb{R}^2 comme isomorphe à une sphère privée d'un point, qu'on appelle "antipode". En effet, si on prend le plan et qu'on le colle sur une sphère en l'étirant, alors tous les points

proches de l'infini (quelle que soit la direction) dans le plan se rapprochent de l'antipode sur la sphère. On peut alors interpréter le folium comme une courbe qui passe à l'antipode avant de revenir par l'autre côté, comme si on faisait le tour de la Terre.

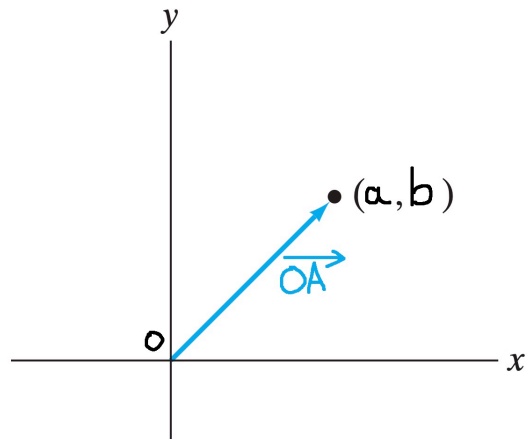
Pour approfondir la compréhension des courbes paramétrées, nous avons différentes façons équivalentes de les décrire (jusqu'ici nous avons seulement vu la première) :

1. avec une paramétrisation en coordonnées cartésiennes $\gamma : t \mapsto (x(t), y(t))$, qui possède le plus de sens physique car on peut voir t comme le temps et la dérivée comme le vecteur vitesse, la dérivée seconde comme le vecteur accélération, etc.
2. avec une paramétrisation en coordonnées polaires $\theta \mapsto \rho(\theta)\vec{e}_r$, au lieu des coordonnées cartésiennes $(x(t), y(t))$. Cela à l'avantage de parfois rendre la figure de la courbe paramétrée bien plus simple à dessiner.
3. avec une équation algébrique du type $\Phi(x, y) = 0$, comme par exemple l'équation du cercle, du Lemniscate, ou même d'une droite etc. L'avantage ici est l'aspect algébrique et l'indépendance de tout paramétrage.

Présentement nous allons surtout étudier le paramétrage en coordonnées polaires, et laissons la formulation grâce à une équation algébrique à des années ultérieures, car le sujet est très profond.

Pour la suite nous avons besoin d'introduire un peu de géométrie et de topologie pour \mathbb{R}^2 .

Le zéro est noté O . Nous pouvons voir les éléments de \mathbb{R}^2 soit comme des points A soit comme leur vecteur associé \vec{OA} . Dans \mathbb{R}^2 nous pouvons choisir un vecteur particulier – qu'on dénote \vec{i} – et son image sous une rotation de 90° dans le sens direct – qu'on note \vec{j} . Le triplet (O, \vec{i}, \vec{j}) est appelé une *base*. Les coordonnées d'un point A de \mathbb{R}^2 – coordonnées qu'on note (a, b) – correspondent aux composantes du vecteur \vec{OA} dans la base (O, \vec{i}, \vec{j}) : $\vec{OA} = a\vec{i} + b\vec{j}$. Un point A est représenté par ses coordonnées (a, b) dans cette base.



Par convention, le vecteur \vec{i} (resp. \vec{j}) est le vecteur reliant l'origine $(0, 0)$ au point $(1, 0)$ (resp. $(0, 1)$). La notation pour un vecteur en algèbre linéaire est une représentation par un vecteur colonne :

$$\vec{OA} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad \vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Etant donné deux points $A = (a, b)$ et $A' = (a', b')$, le vecteur $\vec{AA'}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a'-a \\ b'-b \end{pmatrix}$, en effet cela peut se voir directement comme suit :

$$\vec{AA'} = \vec{OA'} - \vec{OA} = a'\vec{i} + b'\vec{j} - (a\vec{i} + b\vec{j}) = (a - a')\vec{i} + (b - b')\vec{j}$$

Dans tout le cours, on pourra bien souvent identifier le point $A = (a, b)$ avec le vecteur $\vec{OA} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Le point A existe indépendamment de la base choisie mais ses coordonnées en dépendent. Un point reste fixe, mais un vecteur peut être déplacé n'importe où. L'espace \mathbb{R}^2 possède un produit scalaire, qui est linéaire en ses deux entrées :

$$\forall \vec{v} = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}, \vec{v'} = \begin{pmatrix} h' \\ k' \end{pmatrix}, \quad \langle \vec{v}, \vec{v'} \rangle = hh' + kk'$$

Ce produit scalaire induit la norme Euclidienne sur \mathbb{R}^2 :

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} = \sqrt{h^2 + k^2} \quad (1.5)$$

Nous pouvons changer de coordonnées d'un point de \mathbb{R}^2 en faisant un changement de base. Plusieurs sont autorisés, mais un changement de base particulier est induit par le fait de passer en coordonnées polaires. Le plan \mathbb{R}^2 privé de la demi-droite négative est couvert par deux coordonnées cartésiennes (x, y) , ou bien par les coordonnées polaires (r, θ) pour $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in]-\pi, \pi[$. Plus précisément, nous avons une bijection :

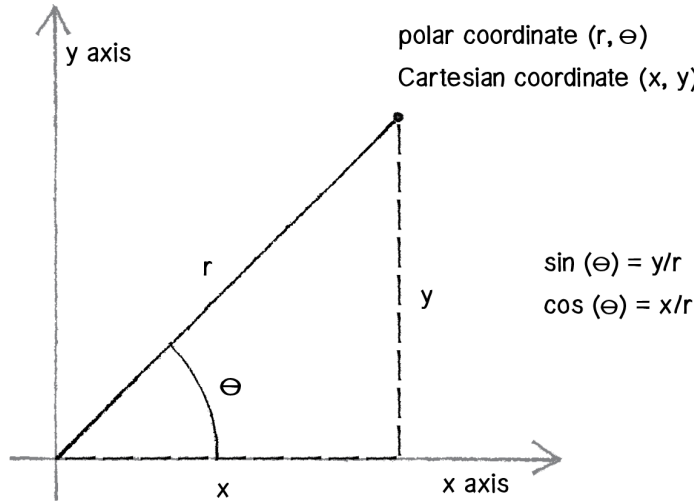
$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[&\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \text{ t.q. } x \leq 0 \text{ et } y = 0\} \\ (r, \theta) &\longmapsto (x, y) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \end{aligned}$$

La fonction réciproque nous donne (r, θ) en fonction de (x, y) , avec

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \text{ t.q. } x \leq 0 \text{ et } y = 0\} &\longrightarrow \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[\\ (x, y) &\longmapsto (r, \theta) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}, 2 \arctan \left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \right) \right) \end{aligned}$$

où l'arctangente est la fonction réciproque de la tangente, telle que décrite dans l'Exemple 1.14. L'expression avec l'arctangente n'est pas très simple donc on peut écrire $\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ pour tout $x > 0$. Pour $x \leq 0$, voir les formules exactes sur Wikipedia (elles dépendent de la valeur de x et de y).

Remarque 1.72. Nous avons montré l'isomorphisme entre $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[$ et $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \text{ t.q. } x \leq 0 \text{ et } y = 0\}$ mais en général on accepte de prendre comme coordonnées polaires toutes les valeurs de $r \geq 0$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$, c'est très utile pour décrire certaines courbes paramétrées.



Grâce à ce changement de coordonnées, nous pouvons aussi changer les vecteurs de base. Un point $(x, y) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ peut donc se ramener à :

$$(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j} = r \cos(\theta)\vec{i} + r \sin(\theta)\vec{j} = r(\cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}) = r\vec{e}_r$$

Donc un point (x, y) de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ définit un vecteur \vec{e}_r pointant dans la direction du point (x, y) . Comme une base de \mathbb{R}^2 nécessite nécessairement deux vecteurs (idéalement perpendiculaires), on définit $\vec{e}_\theta = -\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j}$. Autrement dit nous avons que :

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \times \vec{i} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \times \vec{j} = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Cela revient à faire une rotation de la base (\vec{i}, \vec{j}) d'un angle θ pour obtenir la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$.

Maintenant, si jamais on a une courbe paramétrée $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, alors les vecteurs de base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ tournent continument en fonction de où le point $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ se trouve. Plus précisément nous pouvons transformer une courbe paramétrée $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ en une courbe polaire puisque r et θ dépendent du temps t :

$$\gamma(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} = r(t)(\cos(\theta(t))\vec{i} + \sin(\theta(t))\vec{j}) = r(t)\vec{e}_r(t)$$

où les vecteurs de base \vec{e}_r et \vec{e}_θ tournent en fonction du temps :

$$\begin{aligned}\vec{e}_r(t) &= \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) & \sin(\theta(t)) \\ -\sin(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) \end{pmatrix} \times \vec{i} = \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) \\ -\sin(\theta(t)) \end{pmatrix} \\ \vec{e}_\theta(t) &= \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) & \sin(\theta(t)) \\ -\sin(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) \end{pmatrix} \times \vec{j} = \begin{pmatrix} \sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Le vecteur $\vec{e}_r(t)$ pointe dans la direction du point $(r(t), \theta(t))$. On voit donc que la courbe paramétrée est définie de façon très simple par l'équation

$$\gamma(t) = r(t)\vec{e}_r(t)$$

Les coordonnées polaires sont ainsi parfois plus adaptées pour décrire une courbe paramétrée. Pour le comprendre le mieux, c'est de prendre des exemples.

Exemple 1.73. L'équation algébrique du cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon $R > 0$ est $x^2 + y^2 = R^2$. Une équation paramétrique est $\gamma(t) = (R\cos(t), R\sin(t))$, et une équation polaire est $r = R$. C'est à dire que le cercle est l'ensemble des points (r, θ) tels que $r = R$.

Exemple 1.74. Une droite a pour équation algébrique $ax + by + c = 0$. Cette équation couvre tous les cas : droite verticale ($b = 0$), droite horizontale ($a = 0$), droite oblique $y = \alpha x + \beta = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$. Cette droite passe par des points particuliers qu'on peut obtenir directement à partir de l'équation pour $x = 0$ et $y = 0$. On obtient que les points $(0, -\frac{c}{b})$ et $(-\frac{c}{a}, 0)$ sont sur cette droite (lorsque a et b sont non nuls). Lorsque b est non nul, la valeur $\beta = -\frac{c}{b}$ est l'*ordonnée à l'origine*, et $\alpha = -\frac{a}{b}$ est le *coefficient directeur* de la droite. Dans ce cas, on peut paramétrer la droite comme un arc paramétré particulier :

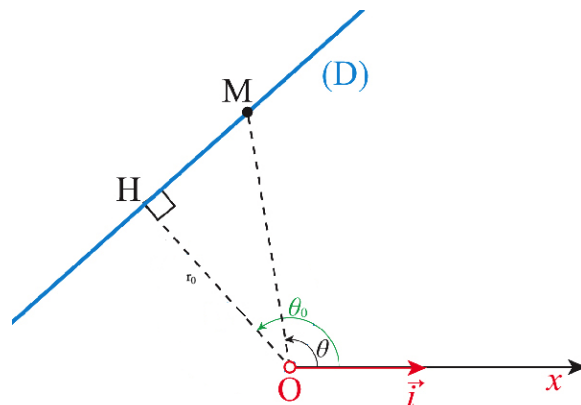
$$\begin{aligned}\gamma : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \left(0, -\frac{c}{b}\right) + t \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{a}{b} \end{pmatrix} = (t, \alpha t + \beta)\end{aligned}$$

Lorsque la droite ne passe pas par l'origine, c'est à dire lorsque $\beta \neq 0$, on peut décrire la droite d'équation $y = \alpha x + \beta$ à l'aide des coordonnées polaires.

Il existe un point H de la droite qui est le plus proche de l'origine, on note (r_0, θ_0) ses coordonnées polaires, avec :

$$r_0 = \beta \cos(\arctan(\alpha)) \quad \text{et} \quad \theta_0 = \frac{\pi}{2} + \arctan(\alpha)$$

Alors la droite est l'ensemble des points de coordonnées polaires (r, θ) qui satisfont l'équation polaire $r\cos(\theta - \theta_0) = r_0$. On voit que le point de coordonnées polaires (r, θ) qui satisfait l'équation polaire de la droite ainsi que la condition $\theta = \theta_0$ est bien le point H .



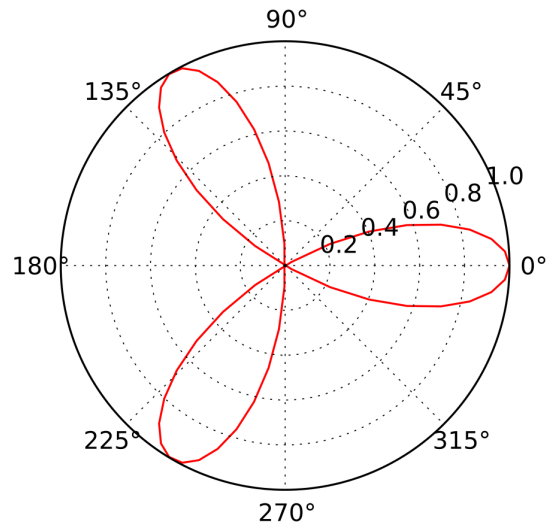
Exemple 1.75. Le trifolium est une courbe paramétrée dont l'équation algébrique est :

$$(x^2 + y^2)[y^2 + x(x - 1)] = -4xy^2$$

L'équation polaire de cette courbe est la suivante :

$$r = \cos(3\theta)$$

Autrement dit les points du plan qui sont sur le trifolium sont les points de coordonnées cartésiennes (x, y) qui satisfont l'équation algébrique, ou de façon équivalente ce sont ceux de coordonnées polaires (r, θ) qui satisfont l'équation polaire. On voit bien sur l'équation polaire que les trois lobes ont des angles de $\frac{\pi}{3}$ entre eux.



Exemple 1.76. L'équation polaire du Lemniscate de Bernoulli de l'exemple 1.68 est $r^2 = a^2 \cos(2\theta)$, et celle du folium de Descartes de l'exemple 1.70 est $r = \frac{3\sin(\theta)\cos(\theta)}{\sin^3(\theta) + \cos^3(\theta)}$.

Exemple 1.77. La cardioïde est une courbe paramétrée dont l'équation algébrique est :

$$(x^2 + y^2 - x)^2 = x^2 + y^2$$

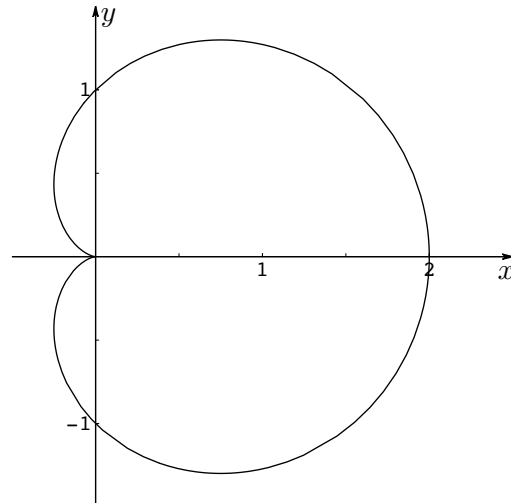
Une équation paramétrique de la cardioïde est :

$$(x(t), y(t)) = ((1 + \cos(t))\cos(t), (1 + \cos(t))\sin(t))$$

L'équation polaire de cette courbe est la suivante :

$$r = 1 + \cos(\theta)$$

On voit que lorsque θ tend vers $\pm\pi$, le point de coordonnées polaires (r, θ) tend vers l'origine $(0, 0)$, et qu'elle est plus simple à visualiser.



Exemple 1.78. Soit $a > 0$. On prend d'une part la droite d'équation $x = 2a$, d'équation polaire $r\cos(\theta) = 2a$, et d'autre part le cercle de centre $(a, 0)$ et de rayon a , d'équation polaire $r = 2a\cos(\theta)$. Soit M_2 un point de la droite, de coordonnées polaires (r_2, θ) (c'est à dire que $r_2\cos(\theta) = 2a$). Le segment $[(0, 0), M_2]$ coupe le cercle en un unique point M_1 , de coordonnées polaires (r_1, θ) (c'est à dire que $r_1 = 2a\cos(\theta)$). C'est le même angle car les points M_1 et M_2 sont alignés. La cissoïde de Dioclès de paramètre $a > 0$ est la courbe tracée par le point M du segment $[(0, 0), M_2]$ dont la distance à l'origine $(0, 0)$ est donnée par la différence entre la distance r_2 de l'origine au point M_2 et la distance r_1 de l'origine au point M_1 . La différence des deux distances $r_2 - r_1$ s'écrit facilement grâce aux équations polaires de la droite et du cercle. On obtient donc l'équation polaire de la cissoïde :

$$r = 2a \left(\frac{1}{\cos(\theta)} - \cos(\theta) \right) = 2a \sin(\theta)\tan(\theta)$$

L'équation algébrique de la cissoïde est :

$$(x^2 + y^2)x = 2ay^2$$

Une équation paramétrique est :

$$(x(t), y(t)) = \left(\frac{2at^2}{1+t^2}, \frac{2at^3}{1+t^2} \right)$$

Nous voyons que l'équation polaire est encore une fois plus claire que l'équation algébrique.

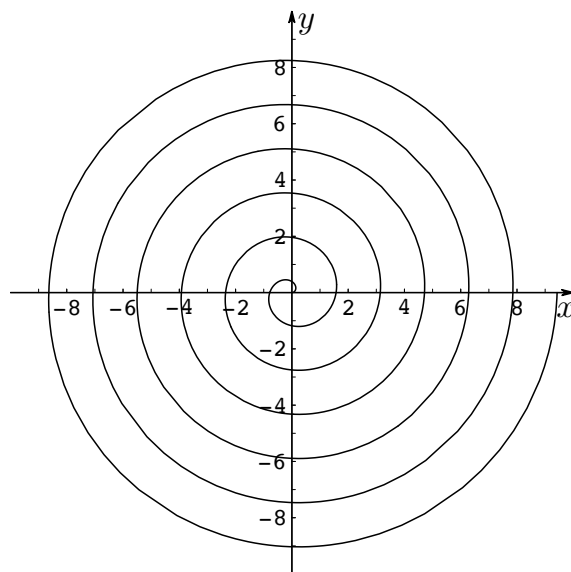
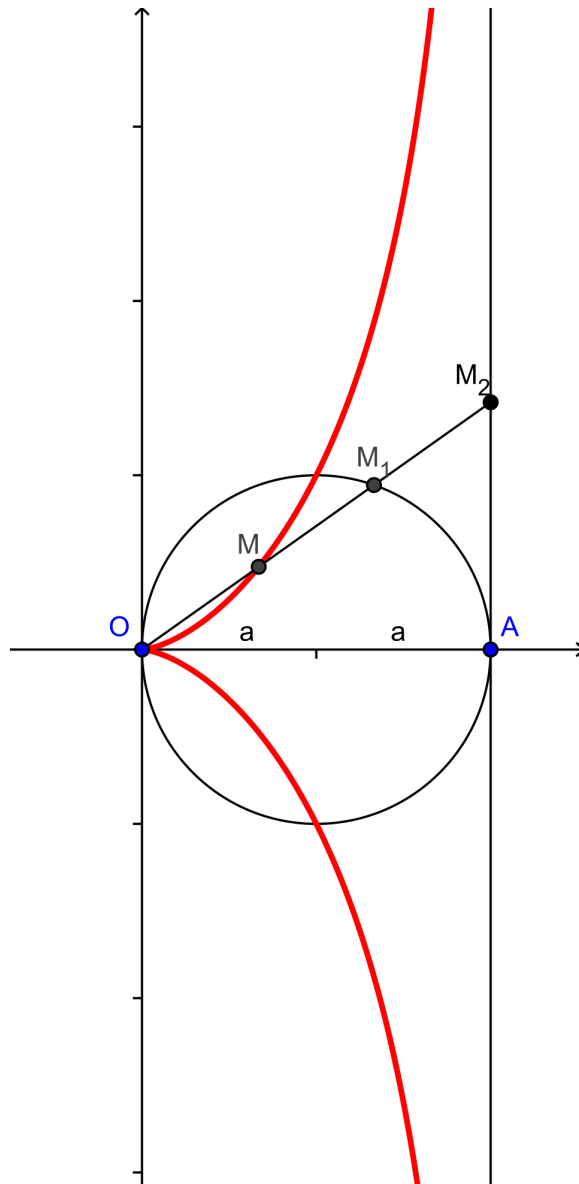
Exemple 1.79. Soit $a > 0$. La spirale d'Archimèdes est définie par l'équation polaire :

$$r = a\theta$$

On peut en déduire l'équation paramétrique est :

$$(x(t), y(t)) = (at\cos(t), at\sin(t))$$

Nous voyons que la courbe paramétrée a une branche infinie quand t tend vers l'infini. Jacques Bernoulli voulait sur sa tombe à Bâles une représentation de la spirale logarithmique d'équation $r = ae^\theta$ qu'il avait étudiée, mais le graveur ne la connaissait pas et a gravé une spirale d'Archimèdes.



1.4 Géométrie des courbes paramétrées

Définition 1.80. Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée. On dit que γ admet un développement limité à l'ordre n en t_0 si ses fonctions coordonnées admettent un développement limité à l'ordre n en t_0 , autrement dit :

$$\begin{aligned}x(t_0 + h) &= x(t_0) + \alpha_1 h + \alpha_2 h^2 + \dots + \alpha_n h^n + \underset{h \rightarrow 0}{o}(h^n) \\y(t_0 + h) &= y(t_0) + \beta_1 h + \beta_2 h^2 + \dots + \beta_n h^n + \underset{h \rightarrow 0}{o}(h^n)\end{aligned}$$

avec $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$ des nombres réels. Dans ce cas on écrit :

$$\gamma(t_0 + h) = \gamma(t_0) + h\vec{v}_1 + h^2\vec{v}_2 + \dots + h^n\vec{v}_n + \underset{h \rightarrow 0}{\vec{o}}(h^n)$$

où $\vec{v}_k = \begin{pmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{pmatrix}$ pour tout $1 \leq k \leq n$, et $\underset{h \rightarrow 0}{\vec{o}}(h^n)$ est une fonction vectorielle dépendant du paramètre h dont les fonctions coordonnées sont négligeables devant h^n .

Remarque 1.81. Les vecteurs \vec{v}_k ne dépendent pas du choix de la base. On a donc que le développement limité ne dépend pas du choix de la base choisie.

On peut appliquer la formule de Taylor-Young s'applique aux courbes paramétrées : si γ est de classe \mathcal{C}^n alors son développement limité à l'ordre n en t_0 est donnée par les dérivées successives de γ évaluées en 0. En particulier, nous pouvons écrire les dérivées successives du chemin γ comme des vecteurs :

$$\overrightarrow{\gamma^{(n)}}(t_0) = \begin{pmatrix} x^{(n)}(t_0) \\ y^{(n)}(t_0) \end{pmatrix}$$

Ceci nous permet d'écrire :

$$\gamma(t_0 + h) = \gamma(t_0) + \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} \overrightarrow{\gamma^{(k)}}(t_0) + \underset{h \rightarrow 0}{\vec{o}}(h^n)$$

Exemple 1.82. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe au moins \mathcal{C}^2 et soit $\gamma_f : I \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto (t, f(t))$ la courbe paramétrée canoniquement associée à f . Le développement limité de la courbe paramétrée à l'ordre 2 au temps $t_0 = a \in I$ est donc :

$$\gamma_f(a + h) = (a, f(a)) + h \begin{pmatrix} 1 \\ f'(a) \end{pmatrix} + h^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{f''(a)}{2} \end{pmatrix} + \underset{h \rightarrow 0}{\vec{o}}(h^2)$$

On observe que au second ordre, le point $\gamma_f(a + h)$ est obtenu d'abord en marchant le long de la tangente pendant un temps h , puis en montant un peu si $f''(a) > 0$ ou descendant un peu si $f''(a) < 0$, et en restant immobile si $f''(a) = 0$. Cela est une description géométrique de la convexité : on a les mêmes informations que le développement à l'ordre 2 de la fonction f , mais sur un dessin !

Définition 1.83. Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée et $t_0 \in I$. Pour tout h assez petit, on note D_h la droite passant par $\gamma(t_0)$ et $\gamma(t_0 + h)$. On appelle tangente au support de γ au point $\gamma(t_0)$ la droite D qui passe par $\gamma(t_0)$ et qui est telle que l'angle aigu entre D et D_h tend vers 0 quand h tend vers 0. On parle de demi-tangente si D est une demi-droite basée en $\gamma(t_0)$.

Proposition 1.84. Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée et $t_0 \in I$. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et un vecteur $\vec{v}_n \neq \vec{0}$ tels que :

$$\gamma(t_0 + h) = \gamma(t_0) + h^n \vec{v}_n + \underset{h \rightarrow 0}{\vec{o}}(h^n)$$

Autrement dit le développement limité de γ en t_0 a tous ses termes nuls avant l'ordre n . Alors nous avons les deux cas suivants :

- si n est impair, le support de γ admet une tangente au point $\gamma(t_0)$ dirigée par \vec{v}_n ;
- si n est pair, le support de γ admet une demi-tangente au point $\gamma(t_0)$ dirigée par \vec{v}_n .

En particulier, si γ admet une dérivée non nulle en t_0 , la tangente à la courbe au temps t_0 est dirigée par $\vec{v}_1 = \vec{\gamma}'(t_0)$.

Exemple 1.85. Prenons la cycloïde de l'Exemple 1.66 qui est une courbe paramétrée de classe \mathcal{C}^∞ . Les deux premières dérivées du chemin γ sont :

$$\gamma'(t) = (a - a\cos(t), a\sin(t)) \quad \text{et} \quad \gamma''(t) = (a\sin(t), a\cos(t))$$

En $t = 0$ on obtient le développement limité suivant :

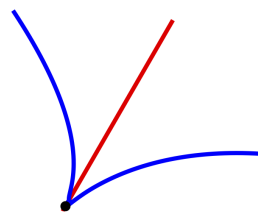
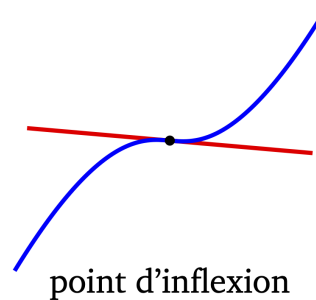
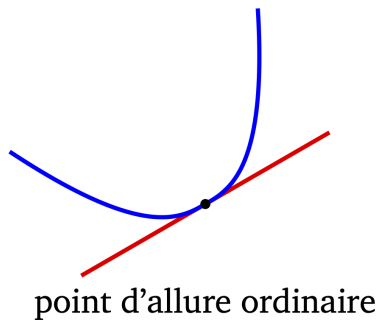
$$\gamma(h) = \gamma(0) + h\vec{\gamma}'(0) + \frac{h^2}{2}\vec{\gamma}''(0) + \underset{h \rightarrow 0}{\vec{o}}(h^2) = (0, 0) + h^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix} + \underset{h \rightarrow 0}{\vec{o}}(h^2)$$

On voit que le premier vecteur non nul dans le développement limité est celui d'ordre 2. D'après la Proposition 1.84 nous déduisons qu'il y a une demi-tangente dirigée par \vec{v}_2 en $(0, 0)$, c'est à dire verticale (cela se voit sur le dessin).

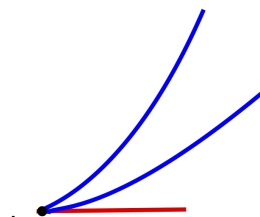
Ce résultat nous permet d'affiner l'étude géométrique des courbes paramétrées en remarquant qu'un point de la courbe peut avoir quatre types de cas. Quand la courbe arrive en $\gamma(t_0)$, le long de sa tangente ou de sa demi-tangente, on a plusieurs possibilités :

- la courbe continue dans le même sens, sans traverser la tangente : c'est un *point d'allure ordinaire*,
- la courbe continue dans le même sens, en traversant la tangente : c'est un *point d'inflexion*,
- la courbe rebrousse chemin le long de cette (demi)-tangente en la traversant, c'est un *point de rebroussement de première espèce*,
- la courbe rebrousse chemin le long de cette (demi)-tangente sans la traverser, c'est un *point de rebroussement de seconde espèce*.

Pour les points de rebroussement, nous n'avons que des demi-tangentes car la courbe s'arrête et fait demi-tour – en français on dit qu'elle "rebrousse chemin", d'où le nom "point de rebroussement". L'idée intuitive est que pour rebrousse chemin, il faut pouvoir s'arrêter (et nous verrons plus tard que la vitesse est nulle en un point de rebroussement).



rebroussement de première espèce



rebroussement de seconde espèce

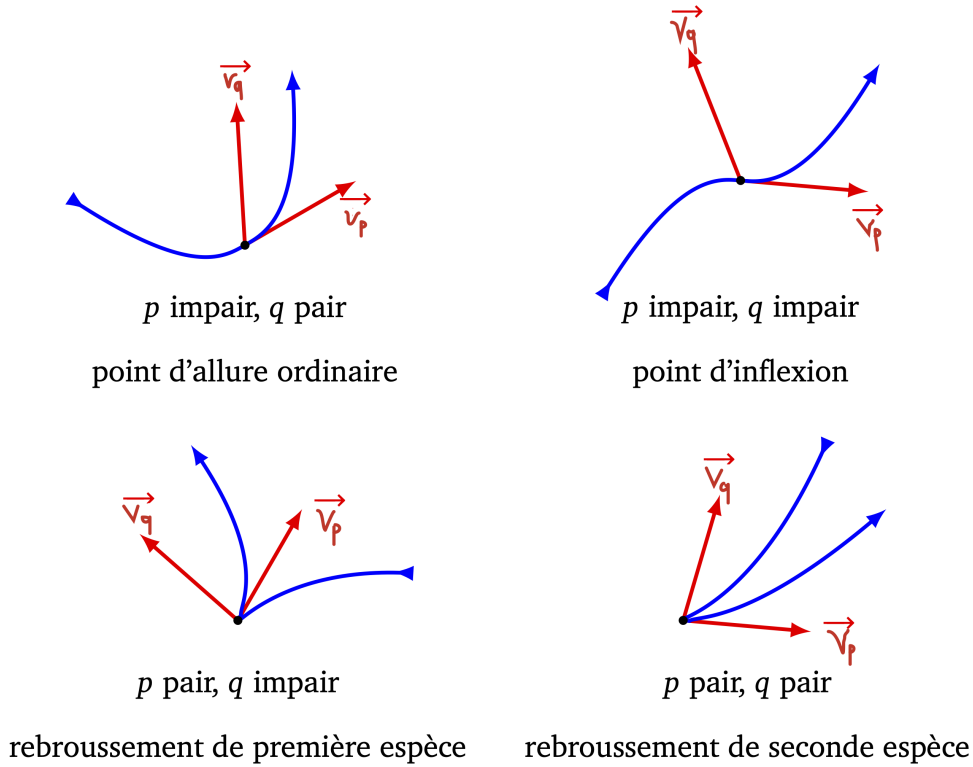


FIGURE 4 – Les cas de figure que l'on peut voir en fonction de la parité des entiers $p < q$.

Nous pouvons caractériser ces quatre types de points grâce au développement limité de la courbe γ au temps t_0 . Soit $p < q \in \mathbb{N}^*$ deux entiers et \vec{v}_p, \vec{v}_q deux vecteurs non-nuls satisfaisant les conditions suivantes :

(i) le développement limité de γ en t_0 est donné par :

$$\gamma(t_0 + h) = \gamma(t_0) + h^p \vec{v}_p + h^{p+1} \vec{v}_{p+1} + \dots + h^{q-1} \vec{v}_{q-1} + h^q \vec{v}_q + \underset{h \rightarrow 0}{\vec{o}}(h^q)$$

(ii) pour tout $p + 1 \leq k \leq q - 1$, les vecteurs \vec{v}_p et \vec{v}_k sont colinéaires, c'est à dire $\vec{v}_k = \lambda_k \vec{v}_p$;

(iii) les deux vecteurs \vec{v}_p et \vec{v}_q sont libres (linéairement indépendants).

Dans ce cas on peut remplacer $\vec{v}_{p+1}, \dots, \vec{v}_{q-1}$ dans le développement limité par leur expression en fonction de \vec{v}_p et on obtient :

$$\gamma(t_0 + h) = \gamma(t_0) + \underbrace{(h^p + \lambda_{p+1} h^{p+1} + \dots + \lambda_{q-1} h^{q-1})}_{\underset{h \rightarrow 0}{\sim} h^p} \vec{v}_p + h^q \vec{v}_q + \underset{h \rightarrow 0}{\vec{o}}(h^q)$$

Les deux vecteurs \vec{v}_p et \vec{v}_q sont donc les deux premiers vecteurs non-nuls apparaissant dans le développement limité de γ en t_0 qui satisfont ces propriétés. Ils donnent des informations sur la direction de la tangente et si la courbe traverse la tangente (ou demi-tangente). Nous avons les caractérisations suivantes établies dans la Figure 1.4.

Remarque 1.86. En général dans les exemples étudiés, nous aurons le cas plus simple où $\vec{v}_{p+1}, \dots, \vec{v}_{q-1}$ sont des vecteurs identiquement nuls. Dans ce cas le développement limité de γ au temps t_0 est simplement :

$$\gamma(t_0 + h) = \gamma(t_0) + h^p \vec{v}_p + h^q \vec{v}_q + \underset{t \rightarrow h}{\vec{o}}(h^q)$$

Et souvent même, nous aurons le cas $q = p + 1$.

Exemple 1.87. Reprenons la cycloïde de l'Exemple 1.66. Prenons le développement limité à l'ordre 3 de γ en 0. Rappelons celui de sinus et de cosinus :

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \underset{t \rightarrow 0}{o}(t^3) \quad \text{et} \quad \cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \underset{t \rightarrow 0}{o}(t^3)$$

Notons que dans le deuxième cas nous avons un petit o de t^3 car le terme suivant du développement limité du cosinus est à l'ordre 4, et donc bien négligeable devant t^3 en 0. Nous avons donc :

$$\gamma(t) = \left(at - a \left(t - \frac{t^3}{3!} + \underset{t \rightarrow 0}{o}(t^3) \right), a - a \left(t - \frac{t^2}{2} + \underset{t \rightarrow 0}{o}(t^3) \right) \right) = \left(a \frac{t^3}{3!}, a \frac{t^2}{2} \right) + \underset{t \rightarrow 0}{\vec{o}}(t^3)$$

On obtient donc le développement limité suivant :

$$\gamma(t) = (0, 0) + \vec{0} + t^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} \frac{a}{6} \\ 0 \end{pmatrix} + \underset{t \rightarrow 0}{\vec{o}}(t^3)$$

Nous voyons que $p = 2$ et $q = 3$ donc c'est un point de rebroussement de première espèce et c'est effectivement bien ce que nous observons sur l'image de la cycloïde. Aussi on note bien que le vecteur \vec{v}_2 point vers le haut (cela définit une demi-tangente verticale), tandis que le vecteur \vec{v}_3 est dirigé vers la droite, qui est bien la direction de parcourt de la cycloïde. On observe que $\vec{v}_1 = \vec{0}$, ce qui correspond à l'idée que la vitesse s'annule au point de rebroussement. La demi-tangente verticale a pour équation $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } (0, t) \text{ pour tout } t \geq 0\}$ (le choix du paramètre a n'a pas d'importance pour décrire la demi-droite).

Exemple 1.88. La cissoïde de Dioclès de l'Exemple 1.78 est visuellement un point de rebroussement de première espèce et effectivement le développement limité à l'ordre 3 de la courbe paramétrée en 0 est :

$$\gamma(t) = (2at^2, 2at^3) + \underset{t \rightarrow 0}{o}(t^3) = (0, 0) + \vec{0} + t^2 \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2a \end{pmatrix} + \underset{t \rightarrow 0}{\vec{o}}(t^3)$$

On a donc bien un point de rebroussement. La demi-tangente est orientée par \vec{v}_2 c'est à dire qu'elle a pour équation paramétrique $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } (t, 0) \text{ pour tout } t \geq 0\}$ (le choix du paramètre a n'a pas d'importance pour décrire la demi-droite).

Exemple 1.89. Prenons le cas du Folium de Descartes de l'Exemple 1.70. Comme dans l'exemple précédent, trouver le développement limité (ici à l'ordre 2) est évident :

$$\gamma(t) = (3t, 3t^2) + \underset{t \rightarrow 0}{o}(t^3) = (0, 0) + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \underset{t \rightarrow 0}{\vec{o}}(t^3)$$

Donc ici le vecteur vitesse \vec{v}_1 n'est pas nul donc $p = 1$ et le vecteur de courbure \vec{v}_2 (nous verrons bientôt ce que c'est) n'est pas nul non plus. Comme $p = 1$ et $q = 2$, nous avons un point d'allure ordinaire en $(0, 0)$. Cela ne semble a priori pas le cas car il y a un croisement à l'origine, mais en réalité pour comprendre cette apparente impossibilité il faut rappeler le paramétrage du folius. Le point $(0, 0)$ est l'image de 0 par γ . La courbe paramétrée dans un voisinage du temps 0 est la ligne qui passe du quadrant en haut à gauche, au quadrant en haut à droite. Les deux autres branches qui tendent vers 0, sont en réalité les limites de la courbes lorsque $t \rightarrow \pm\infty$.

Exemple 1.90. L'astroïde de paramètre $a > 0$ est défini par l'équation algébrique $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. Une paramétrisation est donnée par :

$$x(t) = a\cos(t)^3 \quad \text{et} \quad y(t) = a\sin(t)^3$$

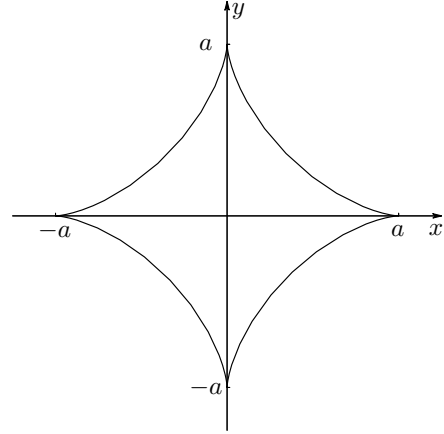
Un développement limité à l'ordre 3 en 0 de ces fonctions coordonnées est :

$$x(t) = a \left(1 - \frac{t^2}{2} + \underset{t \rightarrow 0}{o}(t^3) \right)^3 = a - \frac{3a}{2}t^2 + \underset{t \rightarrow 0}{o}(t^3)$$

$$y(t) = a \left(t - \frac{t^3}{6} + \underset{t \rightarrow 0}{o}(t^3) \right)^3 = at^3 + \underset{t \rightarrow 0}{o}(t^3)$$

Et donc le développement limité de γ en 0 donne :

$$\gamma(t) = (a, 0) + \vec{0} + t^2 \begin{pmatrix} -\frac{3a}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} + \underset{t \rightarrow 0}{o}(t^3)$$



On a donc $p = 2$ et $q = 3$ et comme on voit sur le dessin, on a bien un point de rebroussement de première espèce, avec notamment la demi-tangente qui pointe vers la gauche comme l'indique le signe de $-\frac{3a}{2}$.

Exemple 1.91. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^∞ et soit $\gamma_f : I \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, f(t))$ la courbe paramétrée canoniquement associée à f . Comme le vecteur dérivé de γ_f en un temps $t_0 = a \in I$ est du type $\vec{\gamma}'_f(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(a) \end{pmatrix}$, on voit qu'il ne s'annule jamais. On a donc $p = 1$. Soit $q > p$ le plus petit entier naturel plus grand que p tel que $f^{(q)}(a) \neq 0$ (c'est souvent la dérivée seconde). On a alors comme développement limité :

$$\gamma_f(a+h) = (a, f(a)) + h \begin{pmatrix} 1 \\ f'(a) \end{pmatrix} + h^q \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{f^{(q)}(a)}{q!} \end{pmatrix} + \underset{h \rightarrow 0}{\vec{o}}(h^q)$$

On voit qu'on a deux cas de figure : le point $(a, f(a))$ est un point d'allure ordinaire si q est pair (souvent 2), ou bien un point d'inflexion si q est impair (souvent 3), et dans ce cas on a bien que $f''(a) = 0$. On retrouve tout ce qui a déjà été présenté dans la Remarque 1.51.

Définition 1.92. On dit qu'une courbe paramétrée $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe (au moins) \mathcal{C}^1 est régulière en t_0 si $\gamma'(t_0)$ n'est pas le vecteur nul, i.e. si $\gamma'(t_0) \neq (0, 0)$, et qu'elle est singulière en t_0 si $\gamma'(t_0) = (0, 0)$. Dans ce cas, on dit que le point $\gamma(t_0)$ est un point stationnaire du support de la courbe paramétrée γ . Une courbe paramétrée est dit régulière si elle est régulière en tout point de l'intervalle de définition I .

Remarque 1.93. Une courbe paramétrée est en fait un choix de paramétrage (voir la Définition 1.60). Le support ne change pas, et un même support peut admettre plusieurs paramétrage. Certains peuvent être réguliers, d'autres non. C'est ce qui arrive par exemple dans l'Exemple 1.97.

Exemple 1.94. Si une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors la courbe paramétrée $\gamma_f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de l'Exemple 1.62 est régulière en tous les points où la dérivée de f existe puisque $\vec{\gamma}'_f(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix}$. La première composante ne s'annule jamais. Seule la dérivée de f peut s'annuler. Si par contre f n'est pas dérivable en un point donné, alors elle n'est ni régulière ni singulière car γ_f n'est pas dérivable. Par exemple si $f(x) = \sqrt{x}$, la courbe paramétrée associée est $\gamma_f(t) = (t, \sqrt{t})$, et sa

dérivée est $\gamma'_f(t) = (1, f'(t))$ pour tout $t > 0$, et on voit que la courbe paramétrée est régulière pour tout $t > 0$. En $t = 0$, le nombre dérivé de la deuxième variable n'existe pas donc ce n'est pas un point régulier ni singulier de la courbe paramétrée.

Proposition 1.95. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 , alors la courbe paramétrée

$$\begin{aligned} \gamma_f : I &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (t, f(t)) \end{aligned}$$

est de classe \mathcal{C}^1 et régulière.

Exemple 1.96. Pour la cycloïde de l'Exemple 1.66, dérivons son expression paramétrique par rapport à la variable t :

$$\gamma'(t) = (a - a\cos(t), a\sin(t))$$

Nous voyons que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, nous avons $\gamma'(2k\pi) = (0, 0)$, et uniquement en ces valeurs. Dans ce cas, nous avons que la cycloïde est régulière pour tout temps t sauf en les $2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

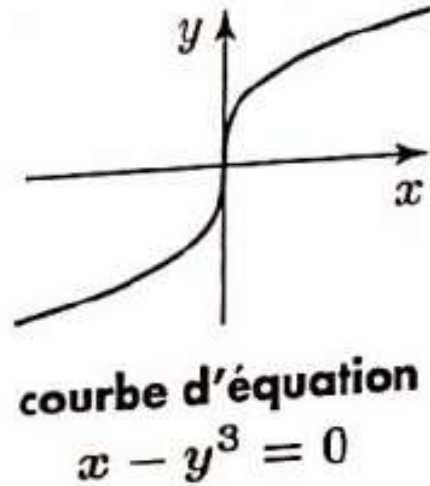
Exemple 1.97. Prenons la courbe algébrique d'équation $x = y^3$. On peut paramétrer la courbe par x ou par y , indifféremment, par contre la paramétrisation par x n'est pas de classe \mathcal{C}^1 en 0. Plus précisément, si on pose

$$(x(t), y(t)) = (t^3, t) \quad (\text{paramétrisation par } y)$$

on a bien que $x(t) = y(t)^3$, et ce paramétrage est régulier en $t_0 = 0$. Par contre, si on pose

$$(x(t), y(t)) = (t, \sqrt[3]{t}) \quad (\text{paramétrisation par } x)$$

on a bien que $x(t) = y(t)^3$, mais la deuxième variable n'est pas dérivable en $t_0 = 0$, donc ce paramétrage n'est ni régulier, ni singulier en $t_0 = 0$



Proposition 1.98. Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée régulière en $t_0 \in I$. Alors l'équation de la tangente au support de γ au point $\gamma(t_0)$ est donnée par :

$$(-y'(t_0))(x - x(t_0)) + x'(t_0)(y - y(t_0)) = 0$$

où $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont les fonctions composantes de γ .

Démonstration. On sait que la droite d'équation $A(x - a) + B(y - b) = 0$ est l'unique droite qui passe par le point (a, b) et qui est perpendiculaire au vecteur $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$. Trouvons le vecteur orthogonal à la droite tangente au support de γ au point $\gamma(t_0)$. Dérivons la fonction γ pour obtenir le vecteur vitesse tangent à la courbe (et donc directeur de la tangente) : $\vec{\gamma}'(t_0) = \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix}$. Le vecteur $\vec{N} = \begin{pmatrix} -y'(t_0) \\ x'(t_0) \end{pmatrix}$ est orthogonal au vecteur $\vec{\gamma}'(t_0)$, et donc perpendiculaire à la droite tangente au point $\gamma(t_0)$. L'équation de cette droite est donc :

$$(-y'(t_0))(x - x(t_0)) + x'(t_0)(y - y(t_0)) = 0$$

comme cela est demandé. □

Remarque 1.99. Notons que cette formule est cohérente avec l'équation de la droite tangente au graphe d'une fonction f au point $(t_0, f(t_0))$. En effet, la courbe paramétrée $\gamma_f : t \mapsto (t, f(t))$ a

pour vecteur vitesse $\vec{\gamma}'_f(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t_0) \end{pmatrix}$. L'équation de la tangente au point $\gamma_f(t_0) = (t_0, f(t_0))$ selon la Proposition 1.98 est donc :

$$(-f'(t_0))(x - t_0) + 1(y - f(t_0)) = 0 \quad \iff \quad y = f(t_0) + f'(t_0)(x - t_0)$$

Définition 1.100. On dit qu'une courbe paramétrée $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe (au moins) \mathcal{C}^2 est birégulière en t_0 si les deux vecteurs $\vec{\gamma}'(t_0)$ et $\vec{\gamma}''(t_0)$ sont indépendants. Une courbe paramétrée est dit birégulière si elle est birégulière en tout point de l'intervalle de définition I .

Exemple 1.101. Prenons une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 , alors sa courbe paramétrée associée $\gamma_f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ est aussi de classe \mathcal{C}^2 . Nous savons par la Proposition 1.95 qu'elle est régulière. Elle sera birégulière en un temps $t_0 = a \in I$ si et seulement si $f''(a) \neq 0$ car dans ce cas :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ f'(a) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ f''(a) \end{pmatrix}$$

sont nécessairement indépendants (par la première composante).

Proposition 1.102. Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée.

1. Si γ est birégulière en t_0 , alors le point $\gamma(t_0)$ est un point d'allure ordinaire.
2. Si $\gamma(t_0)$ est un point de rebroussement, alors c'est un point stationnaire.

Démonstration. Le premier item est immédiat car en effet en utilisant la formule de Taylor-Young pour une fonction de classe \mathcal{C}^2 , nous avons :

$$\gamma(t_0 + h) = \gamma(t_0) + h\vec{\gamma}'(t_0) + \frac{h^2}{2}h\vec{\gamma}''(t_0) + \vec{o}_{h \rightarrow 0}(h^2)$$

Si la courbe est birégulière en t_0 , nous avons que $p = 1$ et $q = 2$, c'est à dire un point ordinaire. Pour le deuxième item, si jamais $\gamma(t_0)$ est un point de rebroussement alors p est pair, donc la dérivée du chemin γ en t_0 est nécessairement nulle. On retrouve l'idée intuitive est que pour rebrousser chemin, il faut pouvoir s'arrêter. \square

Définition 1.103. Soit I, J deux intervalles ouverts de \mathbb{R} . Une bijection $u : I \rightarrow J$ est dite \mathcal{C}^k -difféomorphisme si la fonction u est de classe \mathcal{C}^k et sa fonction réciproque $u^{-1} : J \rightarrow I$ est aussi de classe \mathcal{C}^k .

Une fonction est une bijection si et seulement si elle est strictement monotone (croissante ou décroissante) et dans ce cas sa fonction réciproque a le même sens de variation. Attention être un \mathcal{C}^k -difféomorphisme est une condition plus forte car on demande que la fonction réciproque est aussi de classe \mathcal{C}^k . Il existe des bijection qui ne sont pas des difféomorphismes. C'est le cas de la fonction $f : x \mapsto x^3$, qui est une bijection continue, mais ce n'est pas un difféomorphisme car la fonction réciproque $f^{-1} : x \mapsto \sqrt[3]{x}$ n'est pas dérivable en 0. Cela vient de la formule :

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'((f^{-1}(x)))}$$

On voit que lorsque x tend vers 0, le membre de droite tend vers l'infini. On comprend donc qu'un difféomorphisme est non seulement strictement monotone, mais que sa dérivée ne s'annule jamais.

Définition 1.104. Soit $\gamma_1 : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $\gamma_2 : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ deux courbes paramétrées de classe \mathcal{C}^k . On dit que γ_1 est \mathcal{C}^k -équivalente à γ_2 si il existe un \mathcal{C}^k -difféomorphisme $u : I \rightarrow J$ tel que

$$\forall t \in I \quad \gamma_1(t) = \gamma_2(u(t))$$

Dans ce cas on dit que γ_2 est un paramétrage admissible ou un reparamétrage de γ_1 (et inversement). Si le \mathcal{C}^k -difféomorphisme $u : I \rightarrow J$ est strictement croissant (resp. décroissant), on dit que γ_2 est positivement (resp. négativement) équivalente à γ_1 .

Remarque 1.105. La notion d'équivalence permet de changer de paramétrage de l'arc paramétré. Si le \mathcal{C}^k -difféomorphisme $u : I \rightarrow J$ est strictement croissant on parcourt l'arc paramétré γ_2 dans le même sens que γ_1 , c'est pourquoi on dit que u préserve l'orientation de l'arc et que γ_2 est positivement équivalent à γ_1 . Inversement, si $u : I \rightarrow J$ est strictement décroissant, on parcourt l'arc paramétré γ_2 dans le sens inverse de γ_1 , et on dit que γ_2 est négativement équivalent à γ_1 .

Exemple 1.106. Les deux arcs paramétrés suivants sont positivement \mathcal{C}^∞ -équivalents :

$$\begin{array}{ccc} \gamma_1 :]-\pi, \pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\cos(t), \sin(t)) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \gamma_2 : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right) \end{array}$$

En effet, la fonction $u :]-\pi, \pi[\rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \tan\left(\frac{t}{2}\right)$ est le \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme (croissant) cherché.

Deux courbes paramétrées ont même support mais l'inverse n'est pas vrai : deux courbes ayant même support ne sont pas forcément équivalentes, comme vu dans l'Exemple 1.97. Le premier paramétrage est de classe \mathcal{C}^∞ mais le deuxième n'est que de classe \mathcal{C}^0 car pas dérivable en $t = 0$. Un autre exemple est la donnée des deux arcs paramétrés suivants :

$$\begin{array}{ccc} \gamma_1 : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (t, t) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \gamma_2 : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (t^3, t^3) \end{array}$$

On peut passer de γ_1 à γ_2 par la fonction puissance cube $t \mapsto t^3$ qui est inversible et de classe \mathcal{C}^∞ , mais la fonction inverse – la racine cubique – n'est pas de classe \mathcal{C}^∞ . On voit que la notion d'équivalence des arcs paramétrés est une qualité assez robuste. On observe d'autre part que cette notion d'équivalence est une *relation d'équivalence sur l'espace des arcs paramétrés*. Cela permet de qualifier certaines propriétés des arcs indépendantes du paramétrage.

Proposition 1.107. Être \mathcal{C}^k -équivalent est une relation d'équivalence sur l'ensemble des courbes paramétrées de classe \mathcal{C}^k .

Démonstration. Montrons que être \mathcal{C}^k -équivalent est une relation binaire réflexive symétrique et transitive sur l'ensemble des courbes paramétrées de classe \mathcal{C}^k . Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée de classe \mathcal{C}^k . On prend $u = \text{id} : I \rightarrow I$, c'est un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme et on a $\gamma(t) = \gamma(u(t))$ pour tout $t \in I$. γ est donc \mathcal{C}^k -équivalente à elle-même : c'est réflexif.

Soit $\gamma_1 : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $\gamma_2 : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ deux courbes paramétrées de classe \mathcal{C}^k . On suppose que γ_1 est \mathcal{C}^k -équivalente à γ_2 , c'est à dire qu'il existe un \mathcal{C}^k -difféomorphisme $u : I \rightarrow J$ tel que $\gamma_1(t) = \gamma_2(u(t))$ pour tout $t \in I$. On cherche un \mathcal{C}^k -difféomorphisme $v : J \rightarrow I$ tel que $\gamma_2(s) = \gamma_1(v(s))$ pour tout $s \in J$. Le choix $v = u^{-1} : J \rightarrow I$ convient car c'est un \mathcal{C}^k -difféomorphisme puisque $u : I \rightarrow J$ est un \mathcal{C}^k -difféomorphisme, et d'autre part, pour tout $s \in J$, il existe un unique $t \in I$ tel que $s = u(t)$ et donc $t = u^{-1}(s)$, et donc :

$$\gamma_2(s) = \gamma_2(u(t)) = \gamma_1(t) = \gamma_1(u^{-1}(s))$$

On obtient donc que $\gamma_2(s) = \gamma_1(v(s))$. On déduit que γ_2 est \mathcal{C}^k -équivalente à γ_1 . La relation binaire est symétrique.

Soit $\gamma_1 : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma_2 : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $\gamma_3 : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ trois courbes paramétrées de classe \mathcal{C}^k . On suppose que γ_1 est \mathcal{C}^k -équivalente à γ_2 et que γ_2 est \mathcal{C}^k -équivalente à γ_3 . Il existe un \mathcal{C}^k -difféomorphisme $u : I \rightarrow J$ tel que $\gamma_1(t) = \gamma_2(u(t))$ pour tout $t \in I$, et un \mathcal{C}^k -difféomorphisme $v : J \rightarrow K$ tel que $\gamma_2(s) = \gamma_3(v(s))$ pour tout $s \in J$. On a alors que $v \circ u : I \rightarrow K$ est un \mathcal{C}^k -difféomorphisme, et d'autre part, pour tout $t \in I$, on a $\gamma_1(t) = \gamma_2(u(t)) = \gamma_3(v \circ u(t))$. Ainsi, γ_1 est \mathcal{C}^k -équivalente à γ_3 et donc la relation binaire est transitive. \square

Définition 1.108. Une propriété d'un arc paramétré de classe \mathcal{C}^k invariante par passage à un arc paramétré équivalent s'appelle une propriété géométrique de l'arc.

Proposition 1.109. Les notions d'arc régulier et d'arc birégulier sont des notions géométriques.

Démonstration. Soit $\gamma_1 : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $\gamma_2 : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe au moins \mathcal{C}^1 et deux courbes paramétrées \mathcal{C}^1 -équivalentes, via une bijection $u : I \rightarrow J$. Pour tout $t \in I$, nous avons donc :

$$\vec{\gamma}'_1(t) = u'(t) \times \vec{\gamma}'_2(u(t))$$

La fonction $u : I \rightarrow J$ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme donc sa dérivée ne s'annule jamais. On en déduit que $u'(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$. D'autre part, c'est une bijection donc pour tout $s \in J$ il existe un unique $t \in I$ tel que $s = u(t)$ et donc $t = u^{-1}(s)$. Alors on a :

$$\vec{\gamma}'_2(s) = \frac{1}{u'(u^{-1}(s))} \vec{\gamma}'_1(u^{-1}(s)) = u^{-1}(s) \vec{\gamma}'_1(u^{-1}(s))$$

Comme γ_1 est régulière et que $u^{-1}(s) \neq 0$, le membre de droite est non-nul pour tout $s \in J$. On obtient que $\gamma'_2(u(t)) \neq (0, 0)$. La notion de régularité est donc géométrique.

Maintenant si les arcs $\gamma_1 : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $\gamma_2 : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ sont de classe au moins \mathcal{C}^2 , et la bijection $u : I \rightarrow J$ est de classe \mathcal{C}^2 , nous avons la formule suivante, pour tout $t \in I$:

$$\vec{\gamma}''_1(t) = u''(t) \vec{\gamma}'_2(u(t)) + (u'(t))^2 \vec{\gamma}''_2(u(t))$$

Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $t \in I$ fixé, alors on pose $\lambda' = \lambda u'(t) + \mu u''(t)$ et $\mu' = \mu (u'(t))^2$. Alors nous avons :

$$\lambda \vec{\gamma}'_1(t) + \mu \vec{\gamma}''_1(t) = \lambda u'(t) \vec{\gamma}'_2(u(t)) + \mu u''(t) \vec{\gamma}'_2(u(t)) + \mu (u'(t))^2 \vec{\gamma}''_2(u(t)) = \lambda' \vec{\gamma}'_2(u(t)) + \mu' \vec{\gamma}''_2(u(t))$$

Maintenant on voit que les vecteurs $\vec{\gamma}'_1(t), \vec{\gamma}''_1(t)$ sont libres si et seulement si $\lambda = \mu = 0$, ce qui implique que $\mu' = \mu (u'(t))^2 = 0$ car $u'(t) \neq 0$, et donc que $\lambda' = \lambda u'(t) + 0 = 0$ aussi. Cela veut dire que les vecteurs $\vec{\gamma}'_2(u(t)), \vec{\gamma}''_2(u(t))$ sont libres aussi. L'implication inverse de fait de façon similaire. La notion de birégularité est donc géométrique. \square

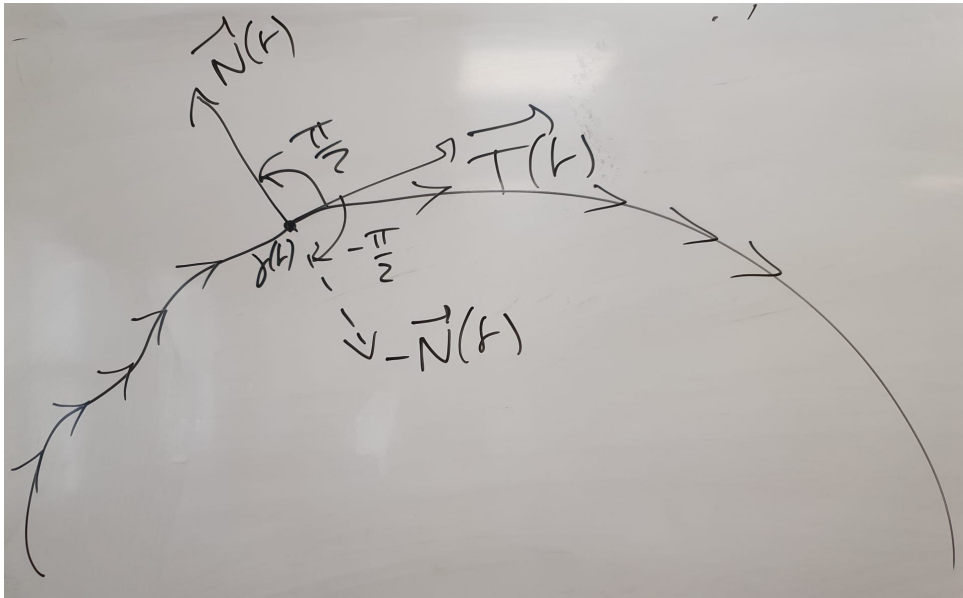
Définition 1.110. Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée régulière. On définit les deux fonctions vectorielles suivantes :

(i) le vecteur tangent unitaire $\vec{T} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ est défini par

$$\forall t \in I, \quad \vec{T}(t) = \frac{\vec{\gamma}'(t)}{\|\vec{\gamma}'(t)\|}$$

(ii) le vecteur normal unitaire $\vec{N} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ est défini par la condition que pour tout $t \in I$, la famille de vecteurs $(\vec{T}(t), \vec{N}(t))$ est orthonormée directe.

On appelle repère de Frenet au point $\gamma(t)$ le repère orthonormé $(\gamma(t), \vec{T}(t), \vec{N}(t))$.



Remarque 1.111. Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthonormés si les conditions suivantes sont remplies :

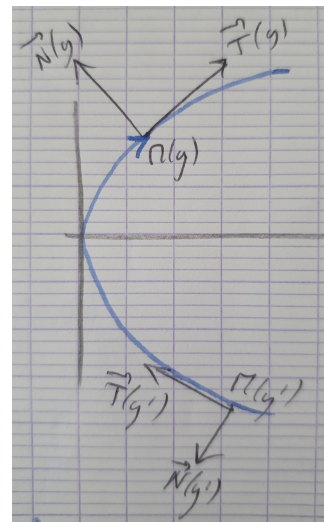
$$\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1 \quad \text{et} \quad \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$$

Ils forment une famille directe si l'angle formé entre \vec{u} et \vec{v} est $\frac{\pi}{2}$. Par définition, le vecteur tangent \vec{T} est automatiquement de norme 1, tandis que pour \vec{N} c'est dans sa définition. Comme le nom l'indique, le vecteur \vec{T} est tangent à la courbe paramétrée, tandis que le vecteur normal \vec{N} est normal à la courbe. En général, si γ est de classe \mathcal{C}^k alors \vec{T} et \vec{N} sont de classe \mathcal{C}^{k-1} . On voit que la définition de \vec{T} est analytique tandis que la définition de \vec{N} est géométrique.

Exemple 1.112. Soit $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'arc paramétré défini par les fonctions composantes $x(t) = t^2$ et $y(t) = t$. Son support est la parabole d'équation $x = y^2$. Au temps t , le vecteur dérivé de l'arc est $\vec{\gamma}'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix}$ et sa norme vaut donc $\|\vec{\gamma}'(t)\| = \sqrt{(2t)^2 + 1}$, ce qui donne :

$$\vec{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{4t^2 + 1}} \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{N}(t) = \frac{1}{\sqrt{4t^2 + 1}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2t \end{pmatrix}$$

On peut vérifier directement que $\langle \vec{T}, \vec{N} \rangle = 0$, que les deux vecteurs ont norme 1, et d'autre part que le vecteur $\vec{N}(t)$ est tourné de $\frac{\pi}{2}$ par rapport au vecteur $\vec{T}(t)$.



Exemple 1.113. Prenons la cycloïde de l'Exemple 1.66, nous avons vu dans l'Exemple 1.96 qu'elle n'était régulière que sur les intervalles du type $]2k\pi, 2(k+1)\pi[$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ car le support de la courbe est 2π -périodique. Prenons $k = 0$, nous avons alors pour tout $t \in]0, 2\pi[$:

$$\vec{\gamma}'(t) = a \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

Notons tout d'abord la formule suivante :

$$1 - \cos(t) = 1 - \cos\left(2\frac{t}{2}\right) = 1 - \left(\cos\left(\frac{t}{2}\right)^2 - \sin\left(\frac{t}{2}\right)^2\right) = \cos\left(\frac{t}{2}\right)^2 + \sin\left(\frac{t}{2}\right)^2 - \cos\left(\frac{t}{2}\right)^2 + \sin\left(\frac{t}{2}\right)^2 = 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2$$

et, avec la formule $\sin(t) = \sin\left(2\frac{t}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)$, on obtient :

$$\vec{\gamma}'(t) = 2a\sin\left(\frac{t}{2}\right)\begin{pmatrix} \sin\left(\frac{t}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix}$$

Ceci nous donne la norme suivante :

$$\left\|\vec{\gamma}'(t)\right\| = 2a\sin\left(\frac{t}{2}\right)\sqrt{\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2 + \cos\left(\frac{t}{2}\right)^2} = 2a\sin\left(\frac{t}{2}\right)$$

Ainsi nous avons :

$$\forall t \in]0, 2\pi[, \quad \vec{T}(t) = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{t}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{N}(t) = \begin{pmatrix} -\cos\left(\frac{t}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix}$$

Définition 1.114. On dit qu'une courbe paramétrée $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe (au moins) \mathcal{C}^1 est paramétrée normalement si

$$\forall s \in I \quad \left\|\vec{\gamma}'(s)\right\| = 1$$

Dans ce cas on appelle le paramètre s une abscisse curviligne de l'arc paramétré γ .

Remarque 1.115. On rappelle que la norme euclidienne d'un vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ de \mathbb{R}^2 est :

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Et donc en particulier que $\|\lambda\vec{v}\| = |\lambda|\|\vec{v}\|$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemple 1.116. Le temps propre d'une particule en relativité restreinte est une abscisse curviligne de sa ligne d'univers.

Pour l'instant, nous admettons que de telles abscisses curvilignes peuvent exister sans démontrer leur existence, et nous reviendrons à la fin du cours pour en construire quelques unes (grâce à l'intégrale). En général on note s l'abscisse curviligne pour bien montrer que le paramétrage a la propriété de conservation de la vitesse. L'intérêt d'une abscisse curviligne est bien entendu de parcourir l'arc paramétré à vitesse constante. Prendre un virage à 20 km/h est sensiblement différent de le prendre à 100 km/h. Parcourir un arc à vitesse constante permet d'avoir des résultats géométriques consistants. Nous voyons qu'un arc paramétré normalement est *nécessairement régulier* car sa vitesse ne s'annule jamais. La réciproque est presque vraie :

Proposition 1.117. Toute courbe paramétrée $\gamma_1 : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ régulière de classe \mathcal{C}^k est positivement \mathcal{C}^k -équivalente à une courbe $\gamma_2 : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe \mathcal{C}^k paramétrée normalement. De plus, le \mathcal{C}^k -difféomorphisme $u : I \rightarrow J$ satisfait :

$$\forall t \in I, \quad u'(t) = \left\|\vec{\gamma}'_1(t)\right\|$$

Démonstration. Nous ne pourrions prouver ce résultat qu'une fois qu'on saura construire les abscisses curvilignes (après avoir vu l'intégration). \square

Exemple 1.118. Prenons l'exemple de la cycloïde sur l'intervalle $]0, 2\pi[$, où elle est régulière. Son paramétrage actuel n'est pas un paramétrage normal. Cependant, nous pouvons trouver un \mathcal{C}^∞ -diffeomorphisme $u :]0, 2\pi[\rightarrow J$ strictement croissant tel que $s = u(t)$ est une abscisse curviligne. Il est donné par :

$$\begin{aligned} u :]0, 2\pi[&\longrightarrow]0, 8a[\\ t &\longmapsto 4a \left(1 - \cos\left(\frac{t}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

Par souci de précision, on peut inverser la bijection u pour obtenir

$$\begin{aligned} u^{-1} :]0, 8a[&\longrightarrow]0, 2\pi[\\ s &\longmapsto 2\arccos\left(1 - \frac{s}{4a}\right) \end{aligned}$$

Notons $\eta :]0, 8a[\rightarrow \mathbb{R}^2$ l'arc paramétré positivement équivalent à la cycloïde $\gamma :]0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (at - a\sin(t), a - a\cos(t))$ par la relation :

$$\forall s \in]0, 8a[\quad \eta(s) = \gamma(u^{-1}(s)) \quad \iff \quad \forall t \in]0, 2\pi[\quad \gamma(t) = \eta(u(t))$$

En utilisant les formules trigonométriques, et juste à titre d'information (on ne l'utilisera pas), on trouve la formule suivante :

$$\forall s \in]0, 8a[\quad \eta(s) = \left(2\arccos\left(1 - \frac{s}{4a}\right) - \sqrt{s - \frac{s^2}{8a}}, s - \frac{s^2}{8a} \right)$$

On retrouve bien la courbe de la cycloïde quand on évalue η sur certaines valeurs de s .

La formule de η est très compliquée, c'est pourquoi pour dériver on va plutôt utiliser la formule $\gamma(t) = \eta(u(t))$, valide pour tout $t \in]0, 2\pi[$. Si on dérive à gauche et à droite du signe égale on a que :

$$\forall t \in]0, 2\pi[\quad \vec{\gamma}'(t) = u'(t) \times \vec{\eta}'(u(t))$$

Or, d'une part nous connaissons le premier vecteur par l'Exemple 1.113, et d'autre part on a $u'(t) = 2a \sin\left(\frac{t}{2}\right)$, ce qui nous donne :

$$\forall t \in]0, 2\pi[\quad 2a \sin\left(\frac{t}{2}\right) \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{t}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix} = 2a \sin\left(\frac{t}{2}\right) \times \vec{\eta}'(u(t))$$

Autrement dit, on a que :

$$\forall t \in]0, 2\pi[\quad \vec{\eta}'(u(t)) = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{t}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix}$$

et on voit bien que, puisque $u :]0, 2\pi[\rightarrow]0, 8a[$ est surjective, $\|\vec{\eta}'(s)\| = 1$ pour tout $s \in]0, 8a[$. La fonction $s = u(t)$ définit ainsi une abscisse curviligne pour la cycloïde.

Exemple 1.119. Pour la parabole horizontale 1.112, nous nous contentons de donner le \mathcal{C}^∞ -diffeomorphisme strictement croissant qui permet de paramétrer normalement la parabole :

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \frac{1}{4} \ln\left(2t + \sqrt{1 + 4t^2}\right) + \frac{t}{2} \sqrt{1 + 4t^2} \end{aligned}$$

Cette fonction définit une abscisse curviligne $s = u(t)$ pour la parabole horizontale.

Prenons une courbe paramétrée $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe au moins \mathcal{C}^2 et paramétrée normalement (donc régulier), grâce à une abscisse curviligne notée s . Nous avons donc :

$$\forall s \in I \quad \left\| \vec{\gamma}'(s) \right\| = 1$$

Pour une courbe paramétrée normalement, le vecteur tangent $\vec{T}(s)$ coïncide donc avec le vecteur dérivée $\vec{\gamma}'(s)$. D'autre part grâce à la relation (1.5) entre produit scalaire et norme euclidienne sur \mathbb{R}^2 , nous avons :

$$\forall s \in I \quad \left\langle \vec{\gamma}'(s), \vec{\gamma}'(s) \right\rangle = 1$$

Nous pouvons donc dériver à gauche et à droite de l'équation, et par symétrie du produit scalaire, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d1}{dt} = 0 &= \left\langle \vec{\gamma}''(s), \vec{\gamma}'(s) \right\rangle + \left\langle \vec{\gamma}'(s), \vec{\gamma}''(s) \right\rangle \\ &= \left\langle \vec{\gamma}'(s), \vec{\gamma}''(s) \right\rangle + \left\langle \vec{\gamma}'(s), \vec{\gamma}''(s) \right\rangle = 2 \left\langle \vec{\gamma}'(s), \vec{\gamma}''(s) \right\rangle \end{aligned}$$

Comme remarque, notons que le produit scalaire ne dépend pas du point où on le prend, or ceci n'est plus valide en relativité générale et donc on aurait un terme de plus à droite (la dérivée du produit scalaire). Ceci nous donne donc :

$$\forall s \in I \quad \left\langle \vec{\gamma}'(s), \vec{\gamma}''(s) \right\rangle = 0$$

Nous en déduisons que le vecteur dérivée seconde (accélération) de γ est *orthogonal* au vecteur vitesse ! Comme l'arc est paramétré normalement, on a $\vec{\gamma}'(s) = \vec{T}(s)$, et sa dérivée vaut $\vec{\gamma}''(s) = \vec{T}'(s)$. De l'équation précédente, nous en déduisons que pour tout $s \in I$, le vecteur $\vec{T}'(s) = \vec{\gamma}''(s)$ est colinéaire au vecteur normal $\vec{N}(s)$. C'est à dire qu'il existe un coefficient réel $\kappa(s)$ (kappa en grec) tel que $\vec{T}'(s) = \kappa(s)\vec{N}(s)$. Comme on peut faire ce raisonnement pour tout temps $s \in I$, cela définit une fonction $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^{k-2} (car \vec{T} est la dérivée première de l'arc γ , et qu'on le dérive à nouveau pour obtenir κ) telle qu'on a la définition suivante :

Définition 1.120. Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée normalement de classe au moins \mathcal{C}^2 . Il existe une fonction $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ (de classe \mathcal{C}^{k-2} si γ est de classe \mathcal{C}^k) qui satisfait :

$$\forall s \in I \quad \vec{T}'(s) = \kappa(s)\vec{N}(s)$$

On appelle courbure de l'arc au point $\gamma(s)$ le nombre réel $\kappa(s)$.

Essayons de donner le sens de la courbure. Maintenant étudions la géométrie du vecteur tangent et du vecteur normal à une courbe. Définissons la fonction vectorielle suivante qui est 2π -périodique. :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \vec{u}_\alpha = \cos(\alpha)\vec{i} + \sin(\alpha)\vec{j} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

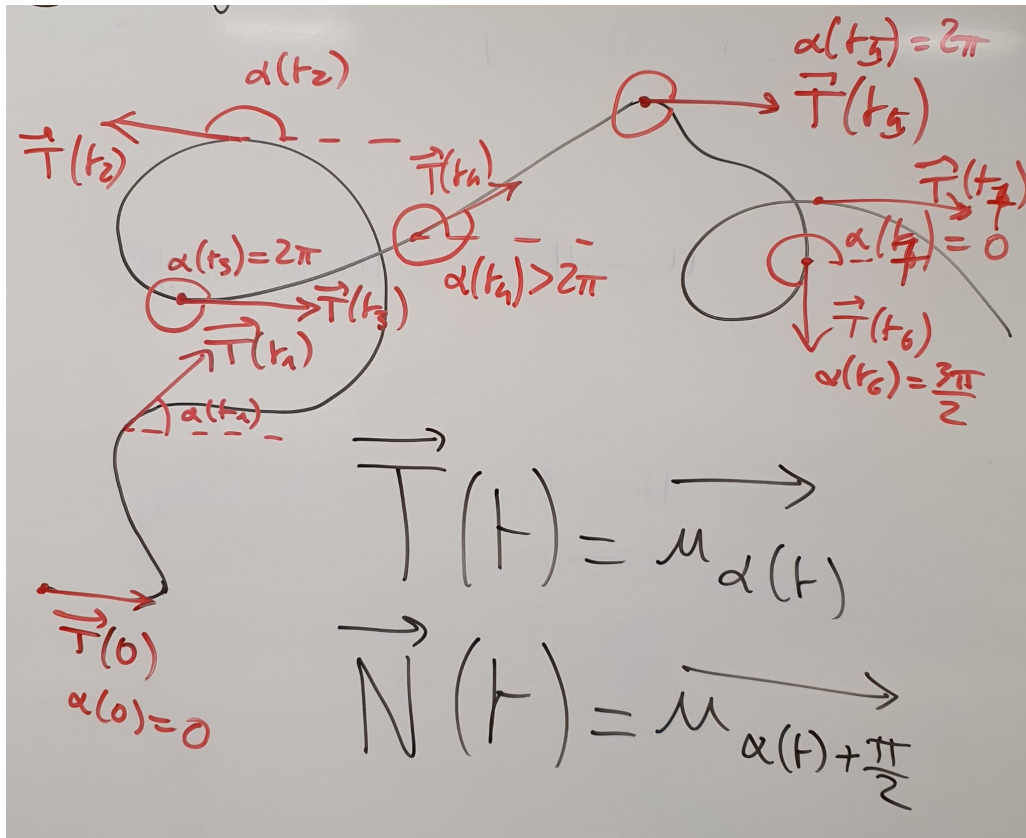
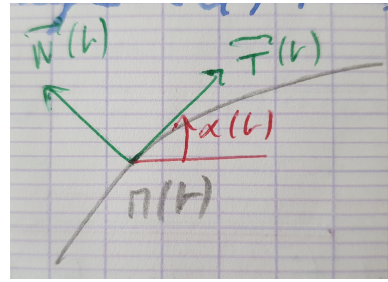
Dans ce cas on note que :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \vec{u}_{\alpha+\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Soit maintenant $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée de classe \mathcal{C}^k (avec $k \geq 1$) et régulière. Pour tout $t \in I$, le vecteur $\vec{T}(t)$ est unitaire donc on peut le représenter comme un point sur le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1.

Il existe donc un angle $\alpha(t) \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{T}(t) = \overrightarrow{u_{\alpha(t)}}$. C'est l'angle (modulo 2π) fait entre \vec{i} et $\vec{T}(t)$. Le vecteur normal $\vec{N}(t)$ étant unitaire et obtenu en tournant $\vec{T}(t)$ de l'angle $\frac{\pi}{2}$, nous avons que $\vec{N}(t) = \overrightarrow{u_{\alpha(t)+\frac{\pi}{2}}}$. Comme les fonctions $\vec{T} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $\vec{N} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ sont de classe \mathcal{C}^{k-1} quand γ est de classe \mathcal{C}^k , nous pouvons définir une fonction $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^{k-1} telle que :

$$\forall t \in I \quad \vec{T}(t) = \overrightarrow{u_{\alpha(t)}} \quad \text{et} \quad \vec{N}(t) = \overrightarrow{u_{\alpha(t)+\frac{\pi}{2}}} \quad (1.6)$$



Notamment nous observons le fait suivant, si on dérive le vecteur $u_{\alpha(t)}$ par rapport au temps nous obtenons le résultat suivant :

$$\forall t \in I \quad \frac{d\overrightarrow{u_{\alpha(t)}}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{d\cos(\alpha(t))}{dt} \\ \frac{d\sin(\alpha(t))}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha'(t)\sin(\alpha(t)) \\ \alpha'(t)\cos(\alpha(t)) \end{pmatrix} = \alpha'(t) \begin{pmatrix} \cos(\alpha(t) + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\alpha(t) + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \alpha'(t) \overrightarrow{u_{\alpha(t)+\frac{\pi}{2}}}$$

et de même

$$\forall t \in I \quad \frac{d\overrightarrow{u_{\alpha(t)+\frac{\pi}{2}}}}{dt} = \begin{pmatrix} -\frac{d\sin(\alpha(t))}{dt} \\ \frac{d\cos(\alpha(t))}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha'(t)\cos(\alpha(t)) \\ -\alpha'(t)\sin(\alpha(t)) \end{pmatrix} = -\alpha'(t) \overrightarrow{u_{\alpha(t)}}$$

On voit donc que dériver le vecteur tangent donne un vecteur colinéaire au vecteur normal (et inversement). Plus précisément nous avons :

$$\forall t \in I \quad \vec{T}'(t) = \alpha'(t)\vec{N}(t) \quad \text{et} \quad \vec{N}'(t) = -\alpha'(t)\vec{T}(t) \quad (1.7)$$

Exemple 1.121. Reprenons la parabole de l'Exemple 1.112. En décomposant \vec{T} sur les vecteurs \vec{i} et \vec{j} , on obtient le système suivant pour la fonction α :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \vec{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{4t^2+1}} \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \cos(\alpha(t)) = \frac{2t}{\sqrt{4t^2+1}} \\ \sin(\alpha(t)) = \frac{1}{\sqrt{4t^2+1}} \end{cases}$$

On en déduit que $\alpha(t) = \arccos\left(\frac{2t}{\sqrt{4t^2+1}}\right)$, où la fonction notée $\arccos :]-1, 1[\rightarrow]0, \pi[$ est la fonction arccosinus, inverse de la fonction cosinus.

Exemple 1.122. Pour la cycloïde, nous avons déterminé le vecteur tangent et le vecteur normal dans l'Exemple 1.113 :

$$\forall t \in]0, 2\pi[, \quad \vec{T}(t) = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{t}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi-t}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi-t}{2}\right) \end{pmatrix}$$

On en déduit que la fonction angle est $\alpha(t) = \frac{\pi-t}{2}$. Cela coïncide bien avec les angles du vecteur tangent à la courbe en $t = 0$ et $t = 2\pi$.

Si on reprend la description géométrique du vecteur tangent et du vecteur normal qui conduit à l'Equation (1.6), mais cette fois-ci on suppose que γ est paramétrée normalement par une abscisse curviligne s . On a donc qu'il existe une fonction $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^{k-1} (si γ est de classe \mathcal{C}^k) telle que :

$$\forall s \in I \quad \vec{T}(s) = \overrightarrow{u_{\alpha(s)}} \quad \text{et} \quad \vec{N}(s) = \overrightarrow{u_{\alpha(s)+\frac{\pi}{2}}}$$

Si on dérive le vecteur tangent par rapport à l'abscisse curviligne, on obtient la formule (1.7) :

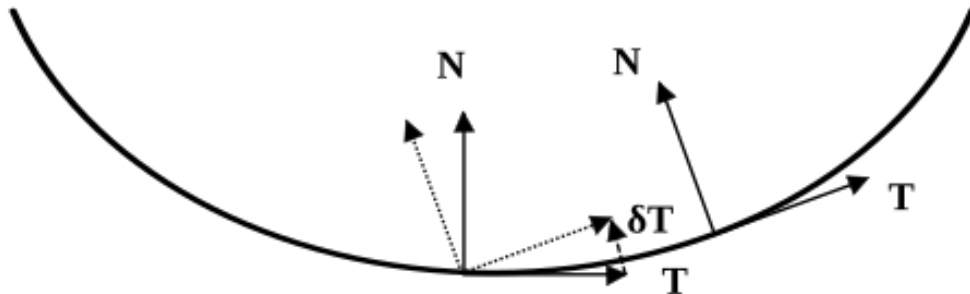
$$\forall s \in I \quad \vec{T}'(s) = \alpha'(s)\vec{N}(s)$$

Et en comparant avec la définition de la courbure, on voit que c'est la dérivée de cette fonction lorsque le paramètre de la courbe est l'abscisse curviligne :

Proposition 1.123. Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée normalement de classe au moins \mathcal{C}^2 , et soit $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction angle définie par la propriété (1.6). Alors

$$\forall s \in I \quad \kappa(s) = \alpha'(s)$$

Remarque 1.124. La courbure mesure donc la vitesse de rotation du vecteur tangent \vec{T} lorsque l'arc est parcouru à la vitesse constante égale à 1. La courbure est positive si l'arc tourne dans le sens trigonométrique et négative si il tourne dans le sens inverse trigonométrique.



Corollaire 1.125. Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée normalement de classe au moins \mathcal{C}^2 . Alors nous avons :

$$\forall s \in I \quad \vec{N}'(s) = -\kappa(s)\vec{T}(s)$$

Démonstration. C'est l'Equation (1.7) appliquée à un arc paramétré normalement. \square

La Proposition 1.123 nous permet de calculer des courbures d'arcs paramétrés, même pour des arcs qui ne sont pas paramétrés normalement. En effet prenons deux arcs $\gamma_1 : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $\gamma_2 : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ positivement équivalents, reliés par un \mathcal{C}^k -difféomorphisme (avec $k \geq 2$) $u : I \rightarrow J$ strictement croissant, alors nous avons nécessairement que $u'(t) > 0$ pour tout $t \in I$. On a donc, pour tout $t \in I$:

$$\frac{\vec{\gamma}'_1(t)}{\|\vec{\gamma}'_1(t)\|} = \frac{u'(t) \times \vec{\gamma}'_2(u(t))}{\|u'(t) \times \vec{\gamma}'_2(u(t))\|} = \frac{u'(t) \times \vec{\gamma}'_2(u(t))}{|u'(t)| \times \|\vec{\gamma}'_2(u(t))\|} = \frac{\vec{\gamma}'_2(u(t))}{\|\vec{\gamma}'_2(u(t))\|}$$

Ce calcul nous donne le résultat suivant :

$$\forall t \in I \quad \vec{T}_1(t) = \vec{T}_2(u(t)) \quad (1.8)$$

Cela implique au niveau des angles α qu'on a modulo 2π :

$$\forall t \in I \quad \alpha_1(t) \equiv \alpha_2(u(t)) \pmod{2\pi}$$

Heureusement on n'a besoin que de la dérivée de ces fonctions, comme on va le montrer. En dérivant l'Equation (1.8), et en utilisant l'Equation (1.7), on a :

$$\forall t \in I \quad \alpha'_1(t) \vec{N}_1(t) = u'(t) \alpha'_2(u(t)) \vec{N}_2(u(t))$$

Par définition des vecteurs normaux unitaires, on a que le vecteur normal $\vec{N}_1(t)$ (resp. $\vec{N}_2(u(t))$) est tourné de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à $\vec{T}_1(t)$ (resp. $\vec{T}_2(u(t))$). On déduit que :

$$\forall t \in I \quad \vec{N}_1(t) = \vec{N}_2(u(t))$$

et donc que :

$$\forall t \in I \quad \alpha'_1(t) = u'(t) \alpha'_2(u(t)) \quad (1.9)$$

Maintenant on suppose que γ_2 est paramétré normalement – c'est à dire que $s = u(t)$ est une abscisse curviligne. Dans ce cas on sait que la courbure de l'arc paramétré au temps $s = u(t)$ est donné par $\kappa(u(t)) = \alpha'_2(u(t))$, d'après la Proposition 1.123. On a donc d'après l'Equation (1.9) que :

$$\forall t \in I \quad \alpha'_1(t) = u'(t) \times \kappa(u(t))$$

Autrement dit nous avons une expression de la courbure pour un arc paramétré avec un paramètre t quelconque :

$$\forall t \in I \quad \kappa(u(t)) = \frac{\alpha'_1(t)}{u'(t)}$$

Par simplicité on note $k(t) = \kappa(u(t))$ cette fonction de t . En utilisant la Proposition 1.117 on a le résultat suivant valide pour toute courbe paramétrée :

Définition 1.126. Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée régulière de classe au moins \mathcal{C}^2 . La courbure de la courbe au point $\gamma(t)$ est donnée par la formule :

$$\forall t \in I \quad k(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\vec{\gamma}'(t)\|} \quad (1.10)$$

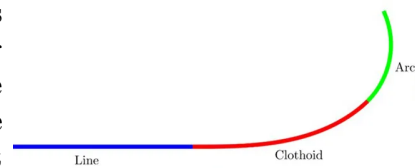
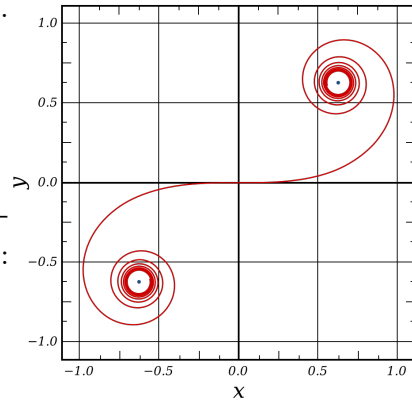
Exemple 1.127. La spirale de Cornu ou Clothoïde est une courbe paramétrée qui a une courbure linéaire avec le temps. Elle est définie par son vecteur vitesse :

$$\vec{\gamma}'(s) = \begin{pmatrix} \cos(s^2) \\ \sin(s^2) \end{pmatrix}$$

La vitesse est constante égale à 1 donc s est une abscisse curviligne et $\vec{T}(s) = \vec{\gamma}'(s)$. On va le dériver pour lire la courbure :

$$\vec{T}'(s) = \begin{pmatrix} -2s \sin(s^2) \\ 2s \cos(s^2) \end{pmatrix} = 2s \vec{N}(s)$$

La courbure de la courbe au temps s est donc $\kappa(s) = 2s$, qui est une fonction linéaire du temps. Cette spirale est utilisée dans les sorties d'autoroute pour assurer une transition en douceur entre une ligne droite et un virage circulaire. Sa courbure varie linéairement avec la distance, permettant au conducteur de tourner le volant progressivement, ce qui évite un changement brutal de force centrifuge.



Exemple 1.128. Calculons la courbure de la parabole de l'Exemple 1.112. Nous avons calculé dans l'Exemple 1.121 la fonction angle α et dans l'Exemple 1.119 une abscisse curviligne de cette courbe. Un calcul assez long mais direct de fonctions dérivées nous donne alors la courbure de l'Equation (1.10) :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad k(t) = -\frac{2}{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Le facteur $3/2$ n'est pas anodin comme nous le verrons plus bas.

Exemple 1.129. Calculons la courbure de la cycloïde. Nous avons calculé dans l'Exemple 1.122 la fonction angle α et dans l'Exemple 1.118 une abscisse curviligne de la cycloïde. Nous obtenons très facilement le résultat suivant :

$$\forall t \in]0, 2\pi[\quad k(t) = -\frac{1}{4a \sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

Proposition 1.130. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe au moins \mathcal{C}^2 . La courbure du graphe de f au point $(t, f(t))$ est donnée par :

$$\forall t \in I \quad k(t) = \frac{f''(t)}{(1 + (f'(t))^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (1.11)$$

Démonstration. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe (au moins) \mathcal{C}^2 . La courbe paramétrée canoniquement associée à f est donnée par $\gamma_f(t) = (t, f(t))$. En suivant le même raisonnement que dans l'Exemple 1.121, le vecteur tangent et la fonction angle sont donnés au temps $t \in I$ par :

$$\vec{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + (f'(t))^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix} \implies \alpha(t) = \arctan(f'(t))$$

où la fonction notée $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est la fonction arctangente, inverse de la fonction tangente. En effet si $\vec{T}(t) = \vec{u}_{\alpha(t)} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha(t)) \\ \sin(\alpha(t)) \end{pmatrix}$, on déduit des composantes de $\vec{T}(t)$ que

$\tan(\alpha(t)) = f'(t)$. Un calcul immédiat nous donne alors que :

$$\forall t \in I \quad \alpha'(t) = \frac{f''(t)}{1 + (f'(t))^2}$$

D'autre part, nous avons que $\|\vec{\gamma}'(t)\| = \sqrt{1 + (f'(t))^2}$ (c'est en fait la définition d'une abscisse curviligne!). On obtient alors le résultat demandé grâce à la formule (1.10). \square

Proposition 1.131. Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée régulière de classe au moins \mathcal{C}^2 . Alors la courbure de la courbe au point $\gamma(t)$ est donnée par la formule :

$$\forall t \in I \quad k(t) = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (1.12)$$

Remarque 1.132. La formule (1.11) est la formule (1.12) avec $x'(t) = 1$ et $y'(t) = f'(t)$.

Proposition 1.133. Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée régulière de classe au moins \mathcal{C}^2 . Alors on a la relation

$$\forall t \in I \quad \vec{T}'(t) = k(t) \|\vec{\gamma}'(t)\| \vec{N}(t)$$

Remarque 1.134. Donc en particulier, pour un arc paramétré normalement on a $k(s) = \kappa(s)$.

Démonstration. Supposons qu'on a trouvé la formule de l'angle α en fonction du temps. On peut donc écrire $\vec{T}(t) = \overline{u_{\alpha(t)}}$. On rappelle les formules (1.7). Dans ce cas on a directement que :

$$\vec{T}'(t) = \alpha'(t) \vec{N}(t) = k(t) \|\vec{\gamma}'(t)\| \vec{N}(t)$$

\square

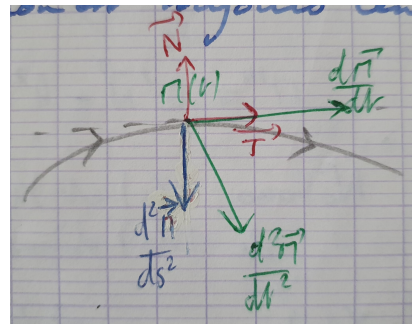
En physique la trajectoire d'une particule est une courbe paramétrée $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ qu'on suppose régulière en tout temps $t \in I$. On note $v(t) = \|\vec{\gamma}'(t)\|$ le module de la vitesse de la particule. On a donc

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{\gamma}'(t)}{v(t)} \quad \text{et} \quad \vec{T}'(t) = \frac{\vec{\gamma}''(t)}{v(t)} - \frac{v'(t)}{v(t)} \vec{T}(t)$$

En ayant que $\vec{T}'(t) = k(t) \vec{N}(t)$, on peut écrire la vitesse et l'accélération de la particule sous la forme des formules de Frenet :

$$\vec{\gamma}'(t) = v(t) \vec{T}(t) \quad \text{et} \quad \vec{\gamma}''(t) = v'(t) \vec{T}(t) + (v(t))^2 k(t) \vec{N}(t)$$

où $v(t)$ est la norme de la vitesse. On voit que l'accélération d'une particule a deux composantes : 1. la dérivée du module de la vitesse, dans la direction tangente, et 2. la composante centripète, dans la direction normale. D'après la troisième loi de Newton, la force que l'on ressent est dans le sens opposé, elle est donc centrifuge.



Proposition 1.135. Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée de classe au moins \mathcal{C}^2 , régulière en $t_0 \in I$. Alors γ est birégulière en t_0 si et seulement si $k(t_0) \neq 0$.

Remarque 1.136. En particulier, cela veut dire que pour un arc birégulier en tout point, la fonction courbure, qui est au moins continue, ne s'annule jamais et donc que la courbe a une courbure soit strictement positive (tourne dans le sens trigonométrique) soit strictement négative (tourne dans le sens inverse trigonométrique).

Démonstration. En reprenant les formules de Frenet, comme $v(t_0) = \|\vec{\gamma}'(t_0)\| \neq 0$, on voit que la paire de vecteurs $(\vec{\gamma}'(t_0), \vec{\gamma}''(t_0))$ est libre (non colinéaire) si et seulement si $k(t_0) \neq 0$. On appelle le repère $(\gamma(t_0), \vec{T}(t_0), \vec{N}(t_0))$ le *repère de Frenet* au temps t_0 . \square

Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée de classe au moins \mathcal{C}^2 , et $t_0 \in I$. Essayons d'approcher localement la courbe paramétrée dans un voisinage de $\gamma(t_0)$, par des cercles tangents à la droite tangente à la courbe au point $\gamma(t_0)$. Attention, il existe une infinité de cercles tangents!! Tous ces cercles ont la particularité que leur centre est localisé sur la droite normale à la tangente à la courbe au point $\gamma(t_0)$, dans la direction du vecteur \vec{N} . Par contre nous allons montrer qu'il existe un qui a des propriétés particulières, en relation avec la courbure au point $\gamma(t_0)$.

Faisons le développement limité de la courbe à l'ordre 3 en t_0 grâce à Taylor-Young :

$$\gamma(t_0 + h) = \gamma(t_0) + h\vec{\gamma}'(t_0) + \frac{h^2}{2}\vec{\gamma}''(t_0) + \frac{h^3}{6}\vec{\gamma}'''(t_0) + \underset{h \rightarrow 0}{o}(h^3)$$

On suppose la courbe paramétrée birégulière en t_0 et paramétrée normalement, cela donne les relations suivantes :

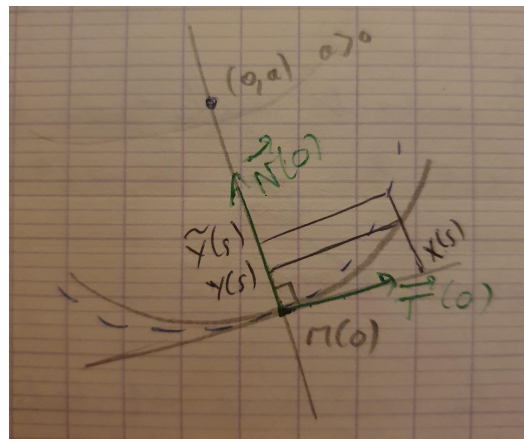
$$\vec{\gamma}'(t_0) = \vec{T}(t_0), \quad \vec{\gamma}''(t_0) = \kappa(t_0)\vec{N}(t_0), \quad \vec{\gamma}'''(t_0) = c'(t_0)\vec{N}(t_0) - (\kappa(t_0))^2\vec{T}(t_0)$$

Notons $X(h)$ et $Y(h)$ les coordonnées du point $\gamma(t_0 + h)$ dans le repère $(\gamma(t_0), \vec{T}(t_0), \vec{N}(t_0))$ qu'on appelle *repère de Frenet*, et nous avons :

$$\begin{cases} X(h) &= h - \frac{h^3}{6}(\kappa(t_0))^2 + \underset{h \rightarrow 0}{o}(h^3) \\ Y(h) &= \frac{h^2}{2}\kappa(t_0) + \frac{h^3}{6}c'(t_0) + \underset{h \rightarrow 0}{o}(h^3) \end{cases}$$

Ces coordonnées sont, à l'ordre 3, les coordonnées du point de la courbe $\gamma(t_0 + h)$.

Maintenant, supposons pour l'exemple que $\kappa(t_0) > 0$, et soit $A > 0$. On note (X, Y) les coordonnées d'un point dans le repère $(\gamma(t_0), \vec{T}(t_0), \vec{N}(t_0))$. Soit Ω le point de coordonnées $(0, A)$ dans ce repère. Le cercle de centre Ω et de rayon A a pour équation algébrique (dans le repère donné) : $X^2 + (Y - A)^2 = A^2$. On en déduit que $Y = A \pm \sqrt{A^2 - X^2}$. Comme le point qui nous intéresse est l'origine du repère de Frenet, on s'intéresse à l'équation $Y = A - \sqrt{A^2 - X^2}$, qui passe effectivement par le point $\gamma(t_0)$ lorsque $X = 0$. On cherche l'équation du cercle qui approxime le mieux la courbe autour de $\gamma(t_0)$.



En particulier, pour h proche de 0, on veut mesurer la distance entre le point $\gamma(t_0 + h)$ et le point du cercle de centre Ω et de rayon A qui a pour abscisse $X(h)$. On note son ordonnée $\tilde{Y}(h)$

dans le repère de Frenet, et on a :

$$\begin{aligned}\tilde{Y}(h) &= A - \sqrt{A^2 - X(h)^2} = A \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{A^2} \left(h - \frac{h^3}{6} (\kappa(t_0))^2 + o_{h \rightarrow 0}(h^3) \right)^2} \right) \\ &= A \left(1 - \sqrt{1 - \frac{h^2}{A^2} + o_{h \rightarrow 0}(h^3)} \right) = A \left(1 - 1 + \frac{h^2}{2A^2} + o_{h \rightarrow 0}(h^3) \right) \\ &= \frac{h^2}{2A} + o_{h \rightarrow 0}(h^3)\end{aligned}$$

On peut comparer la distance $Y(h) - \tilde{Y}(h)$ pour voir quelle valeur de A est optimale pour approximer au mieux la valeur $Y(h)$ par la valeur $\tilde{Y}(h)$. Autrement dit, on veut trouver le cercle qui approxime le mieux la courbe autour du point $\gamma(t_0)$.

$$Y(h) - \tilde{Y}(h) = \left(\frac{\kappa(t_0)}{2} - \frac{1}{2A} \right) h^2 + \frac{h^3}{6} c'(t_0) + o_{h \rightarrow 0}(h^3)$$

Nous voyons que le contact entre un cercle tangent à la droite tangente à la courbe au point $\gamma(t_0)$ et la courbe dans un voisinage du point $\gamma(t_0)$ est au moins d'ordre 2. Lorsque $A = \frac{1}{\kappa(t_0)}$, le contact est d'ordre au moins 3. Si de plus la courbure est stationnaire, c'est à dire si $\kappa(t_0) = 0$ alors le contact est d'ordre au moins 4 (la courbure varie très peu). On voit que le cercle de centre $\Omega = \left(0, \frac{1}{\kappa(t_0)} \right)$ est le cercle qui est le plus proche de la courbe au point $\gamma(t_0)$. Cela justifie la définition suivante :

Définition 1.137. Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée birégulière en $t_0 \in I$. Le rayon de courbure de γ en t_0 est le nombre réel $R(t_0) = \frac{1}{\kappa(t_0)}$. Le centre de courbure de γ au temps t_0 est le point $\Omega(t_0) = \gamma(t_0) + R(t_0)\vec{N}(t_0)$. Le cercle osculateur de γ en t_0 est le cercle de centre $\Omega(t_0)$ et de rayon $|R(t_0)|$.

Remarque 1.138. Le rayon de courbure $R(t_0)$ peut être positif ou négatif, car il indique la direction de l'endroit où se trouve le centre du cercle osculateur, par rapport à la droite tangente à la courbe paramétrée au point $\gamma(t_0)$. Le cercle osculateur est le cercle qui "approche le mieux" la courbe, dans le sens où la différence $Y(h) - \tilde{Y}(h)$ est minimale (d'ordre 3 ou plus) lorsque le rayon de courbure vaut $R(t_0) = \frac{1}{\kappa(t_0)}$.

Définition 1.139. Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe birégulière. On appelle courbe développée de γ le support de l'arc paramétré $t \mapsto \Omega(t)$.

Exemple 1.140. Voici quelques exemples de développées (prises de Wikipedia). La développée

- d'une ellipse est un astroïde non symétrique,
- d'une cycloïde est une cycloïde isométrique,
- d'une spirale logarithmique est la même spirale logarithmique,
- d'une tractrice est une chaînette,
- d'un astroïde est un astroïde (deux fois plus grand et tourné de $\frac{\pi}{4}$),
- d'une cardioïde est une cardioïde (un tiers plus grande),
- d'un cercle est son centre (exemple très important !),
- d'une droite est un point à l'infini (exemple très important !).

Exemple 1.141. Nous allons expliquer pourquoi la développée d'un cercle de centre l'origine et de rayon $R > 0$ est le centre du cercle. La courbe paramétrée encodant le cercle est donnée par $x(t) = R\cos(t)$ et $y(t) = R\sin(t)$. On a donc

$$\vec{T}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix}$$

ce qui donne que la fonction angle est $\alpha(t) = t + \frac{\pi}{2}$. La vitesse de la courbe est $\vec{\gamma}'(t) = R\vec{T}(t)$ donc de norme $\|\vec{\gamma}'(t)\| = R$. La courbure est donc donnée par $k(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\vec{\gamma}'(t)\|} = \frac{1}{R}$. La courbure est constante positive et le rayon de courbure est donc $R(t) = R$, le rayon du cercle ! Le centre de courbure est donné par :

$$\Omega(t) = \gamma(t) + R\vec{N}(t) = (R\cos(t), R\sin(t)) + R \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} = (0, 0)$$

Le centre de courbure est donc le centre du cercle pour tout temps t .

Remarque 1.142. En notant que la développée d'une droite est un point à l'infini, on peut incorporer le cas $k(t_0) = 0$ dans les Définitions 1.137 et 1.139. On observe qu'à ce moment la développée tend vers l'infini pour $t \rightarrow t_0^\pm$ avec pour asymptote la droite perpendiculaire à la tangente à la courbe au point $\gamma(t_0)$.

Nous concluons cette section avec une petite excursion en trois dimensions. Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée de classe au moins \mathcal{C}^3 à valeurs dans l'espace \mathbb{R}^3 . On suppose que l'arc est paramétré normalement par une abscisse curviligne s ; il est donc régulier, c'est à dire que pour tout $s \in I$, $\vec{T}(s) \neq \vec{0}$. Contrairement à ce qui s'est fait en deux dimensions, nous ne pouvons pas définir le vecteur de façon géométrique car il y a une infinité de façons de choisir un vecteur unitaire orthogonal au vecteur $\vec{T}(t)$ en dimension 3, là où il n'y avait que deux façons de le faire en dimension 2. C'est pourquoi le vecteur normal unitaire est défini en tout temps s tel que $\vec{T}'(s) \neq \vec{0}$ par la formule suivante :

$$\vec{N}(s) = \frac{\vec{T}'(s)}{\|\vec{T}'(s)\|}$$

Comme la courbe paramétrée γ est de classe au moins \mathcal{C}^2 , le vecteur $\vec{T}'(s)$ dépend continument du temps s et donc le vecteur $N(s)$ dépend au moins continument du temps s , est bien un vecteur unitaire, et est normal à la tangente à la courbe au point $\gamma(s)$.

En trois dimensions, nous pouvons cependant définir un troisième vecteur – noté $\vec{B}(s)$ et appelé vecteur *binormal* – de façon à ce que les trois vecteurs $(\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}(s))$ forment une base orthonormale de \mathbb{R}^3 pour tout $s \in I$. On définit le vecteur binormal au temps s par le produit vectoriel suivant :

$$\vec{B}(s) = \vec{T}(s) \wedge \vec{N}(s) = \begin{pmatrix} T^2(s)N^3(s) - T^3(s)N^2(s) \\ T^3(s)N^1(s) - T^1(s)N^3(s) \\ T^1(s)N^2(s) - T^2(s)N^1(s) \end{pmatrix}$$

où on a noté $\vec{T}(s) = \begin{pmatrix} T^1(s) \\ T^2(s) \\ T^3(s) \end{pmatrix}$ et $\vec{N}(s) = \begin{pmatrix} N^1(s) \\ N^2(s) \\ N^3(s) \end{pmatrix}$.

Remarque 1.143. Attention ici, les exposants ne sont *pas* des puissances, mais une notation pour indiquer la première, la deuxième ou la troisième composante. D'habitude les mathématicien · nes écrivent une composante avec un indice en bas, mais à partir du master on adopte les convention de la géométrie différentielle qui met les indice en haut.

Remarquons que pour tout $s \in I$, nous avons $\|\vec{N}(s)\| = 1$. On déduit qu'on peut dériver le produit scalaire :

$$\frac{d}{ds} \langle \vec{N}(s), \vec{N}(s) \rangle = 2 \langle \vec{N}'(s), \vec{N}(s) \rangle = \frac{d1}{ds} = 0$$

On déduit que le vecteur dérivé $\vec{N}'(s)$ est orthogonal à \vec{N} . Il est donc dans le plan engendré par $\vec{T}(s)$ et $\vec{B}(s)$. On connaît déjà sa composante selon $\vec{T}(s)$, c'est moins la courbure de la courbe.

On note $\tau(s)$ sa composante selon $\vec{B}(s)$, c'est à dire que l'on a $\vec{N}'(s) = -\kappa(s)\vec{T}(s) + \tau(s)\vec{B}$. Comme on peut faire ce raisonnement pour tout temps $s \in I$, cela définit une fonction $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^{k-3} (car \vec{N} est la dérivée seconde de l'arc γ , et qu'on le dérive à nouveau pour obtenir τ) telle qu'on a la définition suivante :

Définition 1.144. Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée de classe au moins \mathcal{C}^3 , paramétrée normalement. Il existe une fonction $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$ (de classe \mathcal{C}^{k-3} si γ est de classe \mathcal{C}^k) qui satisfait :

$$\forall s \in I \quad \vec{N}'(s) = -\kappa(s)\vec{T}(s) + \tau(s)\vec{B}$$

On appelle torsion de l'arc au point $\gamma(s)$ le nombre réel $\tau(s)$.

Remarque 1.145. Comme pour le Corollaire 1.125, on peut montrer qu'on a $\vec{B}'(s) = -\tau(s)\vec{N}(s)$.

La torsion $\tau(s)$ mesure la vitesse de rotation du vecteur binormal au temps s . Plus la torsion est grande, plus le vecteur binormal tourne rapidement autour de l'axe défini par le vecteur tangent. Quelques propriétés de la torsion :

- une courbe paramétrée est une hélice si et seulement si sa courbure et sa torsion sont constantes non nulles ;
- une courbe est plane (incluse dans un plan de \mathbb{R}^3) si et seulement si sa torsion est nulle ;
- Les formules reliant les vecteurs $(\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}(s))$ à leur dérivée respective sont appelées *formules de Frenet-Serret* :

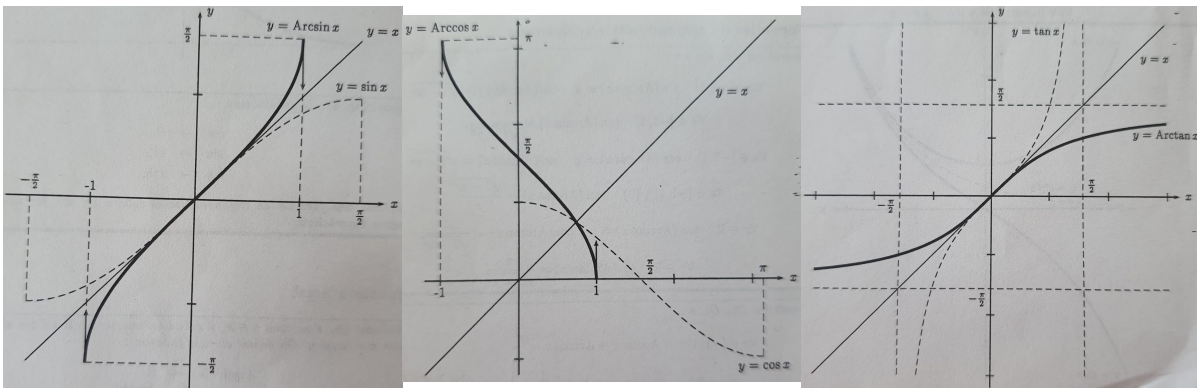
$$\vec{T}'(s) = \kappa(s)\vec{N}(s), \quad \vec{N}'(s) = -\kappa(s)\vec{T}(s) + \tau(s)\vec{B}(s), \quad \vec{B}'(s) = -\tau(s)\vec{N}(s)$$

Remarque 1.146. Rendez-vous sur cette [page Wikipedia](#) pour voir plein d'illustrations sur la courbure et la torsion des courbes paramétrées.

2 Théorie de l'intégration des fonctions

2.1 Approfondissement sur l'analyse réelle

Il existe plusieurs fonctions que l'on doit bien connaître par coeur : les trois fonctions trigonométriques, le logarithme et l'exponentielle. Les fonctions trigonométriques possèdent des fonctions inverses : arcsin, arccos et arctan. Il faut en particulier connaître cette dernière, souvent très utile.



Nous avons aussi d'autres fonctions usuelles, les fonctions cosinus, sinus et tangente hyperboliques, définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$$

Ces fonctions se comportent de façon très similaire aux fonctions trigonométrique car

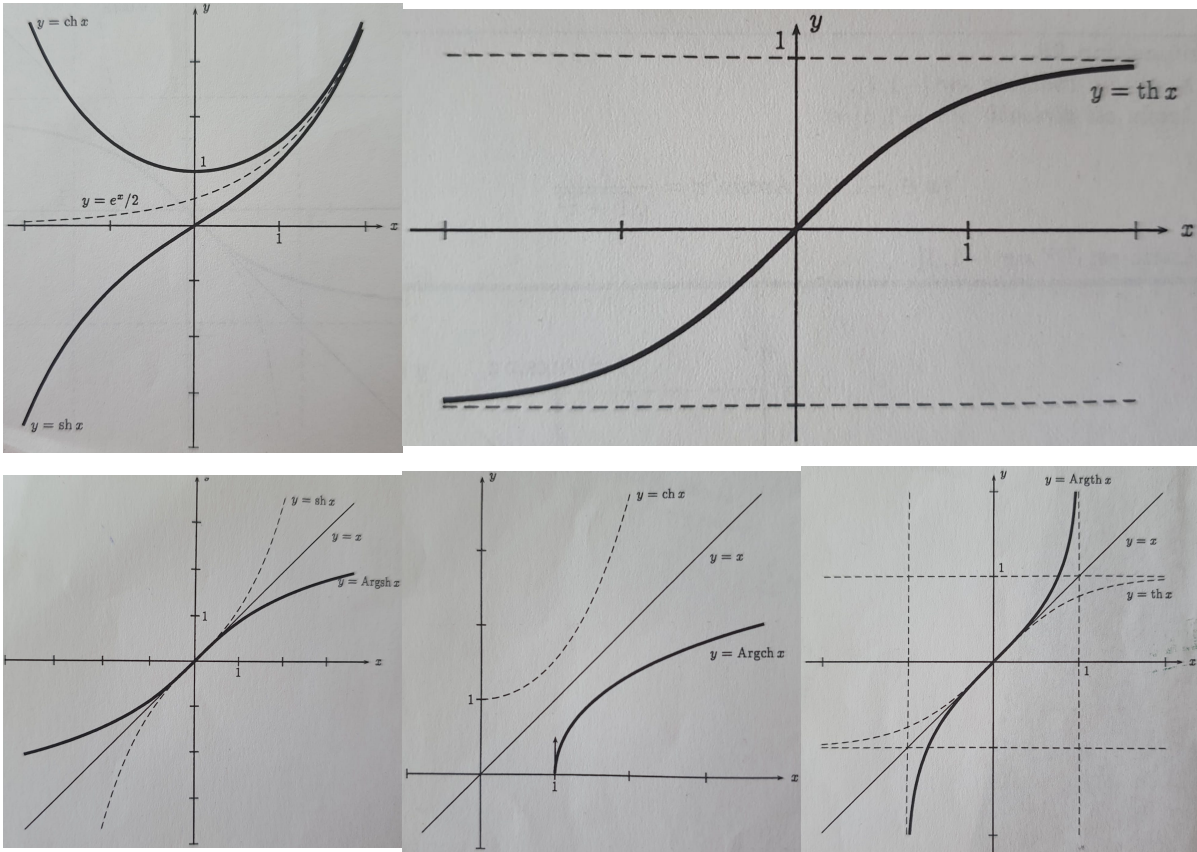
Proposition 2.1. En notant $i = \sqrt{-1}$, la substitution

$$\cos \longrightarrow \text{ch}, \quad \sin \longrightarrow \text{ish}, \quad \tan \longrightarrow \text{ith}$$

transforme une formule de trigonométrie circulaire en une formule de trigonométrie hyperbolique.

Exemple 2.2. Par exemple, la formule $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ devient $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$.

Remarque 2.3. Bien entendu les fonctions hyperboliques ont des inverses, notées argsh , argch et argth .



On rappelle la définition de la continuité d'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\forall a \in D, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in D, |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

On voit que le choix de δ dépend de ϵ , c'est classique, mais il semblerait aussi du choix du point $a \in D$. Prenons un exemple particulier, avec la fonction $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$. Soit par exemple $a > 0$ et soit $\epsilon > 0$, on cherche alors δ qui satisfait la condition de continuité. On veut un $a > \delta > 0$ tel que pour tout $x \in]a - \delta, a + \delta[$, on a $|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}| < \epsilon$. Ceci donne de façon équivalente $|\frac{1 - \frac{x}{a}}{x}| < \epsilon$. Essayons de trouver ce $\delta > 0$. Supposons que nous avons $x \in]a - \delta, a + \delta[$, alors on a les inégalités suivantes :

$$a - \delta < x < a + \delta \iff 1 - \frac{\delta}{a} < \frac{x}{a} < 1 + \frac{\delta}{a} \iff -1 - \frac{\delta}{a} < -\frac{x}{a} < -1 + \frac{\delta}{a} \iff -\frac{\delta}{a} < 1 - \frac{x}{a} < \frac{\delta}{a}$$

Ceci donne $|1 - \frac{x}{a}| < \frac{\delta}{a}$. On a donc – en se rappelant que $0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{a - \delta}$:

$$\left| \frac{1 - \frac{x}{a}}{x} \right| < \frac{\delta}{a} \frac{1}{a - \delta}$$

Si on veut que le membre de droite soit inférieur ou égal à ϵ , on écrit :

$$\frac{\delta}{a(a-\delta)} = \epsilon \quad \iff \quad \delta = \frac{\epsilon a^2}{1 + \epsilon a} \underset{\epsilon \rightarrow 0}{\sim} \epsilon a^2$$

Cela veut dire que si on choisit δ comme la formule de droite, alors la définition de la continuité de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ en $a > 0$ est satisfaite. On voit donc que le δ optimal pour satisfaire la définition de la continuité dépend de ϵ et de a . Nous voyons que la largeur δ dépend fortement du choix du point $a > 0$, comme le montrent les deux images suivantes, en $a = 2$ et $a = \frac{1}{2}$. Il existe des fonctions continues dont le δ ne dépend que de ϵ et pas du point a choisi.

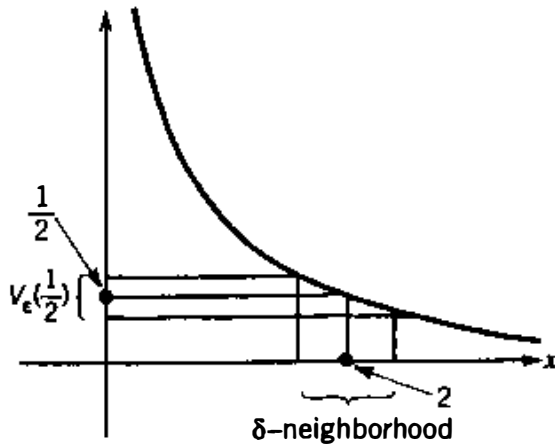


Figure 5.4.1 $g(x) = 1/x \quad (x > 0)$

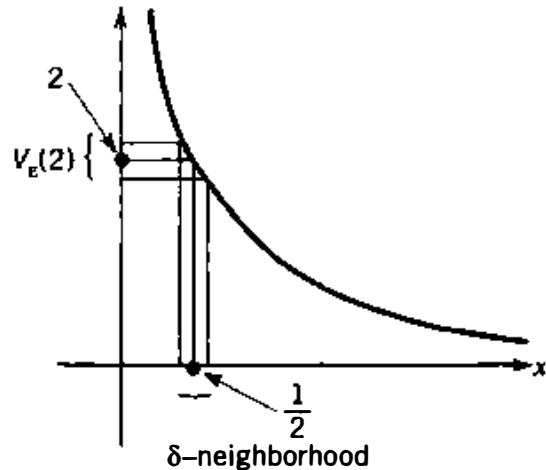


Figure 5.4.2 $g(x) = 1/x \quad (x > 0)$

Définition 2.4. On dit qu'une fonction réelle $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est uniformément continue sur D si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall a \in D, \forall x \in D, |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

Remarque 2.5. On voit qu'on a échangé la place du quantificateur $\forall a \in D$. Cela a la conséquence que δ ne dépend pas du choix du point a . En réalité nous pouvons écrire la proposition comme :

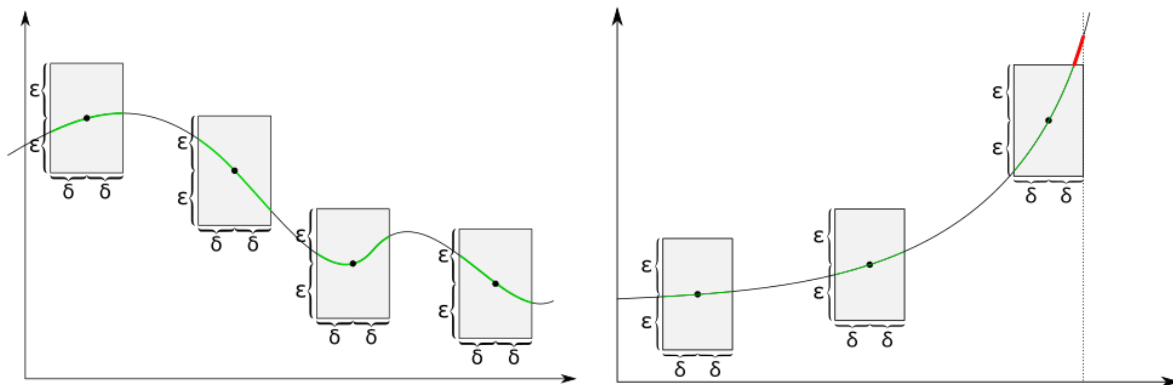
$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x, y \in D, |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

On ne peut pas être uniformément continue en un point, on l'est sur un sous-ensemble. La continuité uniforme est une propriété globale, tandis que la continuité est une propriété locale. L'uniforme continuité est une propriété beaucoup plus forte.

Exemple 2.6. Prenons la fonction racine carrée. Soit $\epsilon > 0$, nous allons trouver un $\delta > 0$ qui ne dépend pas du point et qui satisfait la phrase mathématique ci dessus. Remarquons que pour tout $x, y \geq 0$ nous avons alors :

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}|^2 \leq |\sqrt{x} - \sqrt{y}| |\sqrt{x} + \sqrt{y}| = |x - y|$$

Posons $\delta = \epsilon^2$, dès lors si $|x - y| < \delta$, nous avons $|\sqrt{x} - \sqrt{y}|^2 < \epsilon^2$ c'est à dire $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \epsilon$. Ceci étant vrai pour tout choix de $\epsilon > 0$, ceci prouve que la fonction racine carrée est uniformément continue.



Pour les fonctions uniformément continues, pour chaque nombre réel positif $\epsilon > 0$ il existe un nombre réel positif $\delta > 0$ tel que lorsqu'on dessine un rectangle autour de chaque point du graphique avec une largeur égale à 2δ et une hauteur égale à 2ϵ , le graphique se trouve entièrement à l'intérieur de la hauteur du rectangle. Pour les fonctions non uniformément continues, il existe un nombre réel positif $\epsilon > 0$ tel que, pour tout nombre réel positif $\delta > 0$, il existe un point sur la courbe représentative tel que, si l'on trace un rectangle de hauteur égale à 2ϵ et de largeur égale à 2δ autour de ce point, il existe une valeur de la fonction directement au-dessus ou en dessous du rectangle. Il peut exister un point de la courbe représentative entièrement contenu dans la hauteur du rectangle, mais cela n'est pas vrai pour tous les points de la courbe.

Remarque 2.7. La première définition publiée de la continuité uniforme est due à Heine en 1870. En 1872, il publia une démonstration qu'une fonction continue sur un intervalle ouvert n'est pas nécessairement uniformément continue. Ces démonstrations sont presque identiques à celles données par Dirichlet dans ses cours sur les intégrales définies en 1854. La définition de la continuité uniforme apparaît antérieurement dans l'œuvre de Bolzano, qui démontra également que les fonctions continues sur un intervalle ouvert ne sont pas nécessairement uniformément continues. Il affirma par ailleurs qu'une fonction continue sur un intervalle fermé est uniformément continue, mais sans en fournir une démonstration complète.

Proposition 2.8. *Une fonction uniformément continue est continue.*

Démonstration. C'est immédiat d'après la définition. □

Définition 2.9. Soit $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et soit $k > 0$. On dit que f est k -Lipschitzienne si :

$$\forall x, y \in D, \quad |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

Remarque 2.10. L'interprétation géométrique d'une fonction k -Lipschitzienne peut se voir comme suit. Pour tout $x \neq y$, on a $\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq k$. Le membre de gauche est le coefficient directeur de la droite passant par $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$. On en déduit que la pente de cette droite est inférieure à k en valeur absolue.

Proposition 2.11. Inégalité des accroissements finis. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors f est k -Lipschitzienne si et seulement si il existe $k > 0$ tel que $|f'(x)| \leq k$ pour tout $x \in]a, b[$.

Démonstration. Si f est k -Lipschitzienne, alors la valeur absolue du taux d'accroissement est majorée par k . Donc, en faisant tendre y vers x on obtient que $|f'(x)| \leq k$. Inversement, soit $x < y \in [a, b]$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $z \in]x, y[$ tel que $f'(z) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$. Comme $|f'(z)| \leq k$, on déduit que $\left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| \leq k$. On peut faire ce raisonnement pour toute paire de points $x < y$, ce qui prouve que f est k -Lipschitzienne. □

Proposition 2.12. Une fonction Lipschitzienne est uniformément continue.

Démonstration. Supposons que f est k -Lipschitzienne. Soit $\epsilon > 0$, on pose $\delta = \frac{\epsilon}{k}$. □

Une fonction uniformément continue est automatiquement continue, mais l'inverse n'est pas vraie, comme le montre l'exemple de la fonction continue $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui n'est pas uniformément continue (sur \mathbb{R}_+^*). Il peut donc être intéressant de caractériser un critère de non-uniforme continuité grâce aux suites réelles comme on avait donné un critère de non-continuité grâce aux suites. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction alors elle n'est pas uniformément continue si et seulement si il existe $\epsilon > 0$ et deux suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - y_n) = 0 \quad \text{et} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$$

Comme exemple nous pouvons voir que la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ satisfait ce critère en prenant $x_n = \frac{1}{n}$ et $y_n = \frac{1}{n+1}$. Ce critère de non-uniforme continuité permet de montrer la proposition suivante, où la continuité implique l'uniforme continuité comme une réciproque particulière de la Proposition 2.8 :

Théorème 2.13. Théorème de Heine-Cantor. Soit $[a, b]$ un segment non vide de \mathbb{R} . Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $[a, b]$, alors elle est uniformément continue sur $[a, b]$.

Démonstration. Nous allons montrer la contraposée : si f n'est pas uniformément continue sur $[a, b]$, alors elle n'est pas continue sur $[a, b]$, c'est à dire qu'il existe un point $c \in [a, b]$ tel que f n'est pas continue en c . Nous avons le critère de non-uniforme continuité : il existe $\epsilon > 0$ et deux suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - y_n) = 0 \quad \text{et} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$$

Comme $[a, b]$ est un segment, le théorème de Bolzano-Weierstrass nous dit que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente, notées $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, avec comme fonction extractrice strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. On note x la limite de la suite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$; c'est un point du segment $[a, b]$. Nous avons :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |y_{\varphi(n)} - x| = |y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)} + x_{\varphi(n)} - x| \leq |y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}| + |x_{\varphi(n)} - x|$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - y_n) = 0$ on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}) = 0$, et le dernier terme à droite tend aussi vers 0, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} |y_{\varphi(n)} - x| = 0$, c'est à dire que la suite $(y_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ tend aussi vers la limite commune $x \in [a, b]$.

On a donc aussi que $f(x) = f(y)$. Nous pouvons utiliser l'inégalité triangulaire pour obtenir :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad \epsilon &\leq |f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| = |f(x_{\varphi(n)}) - f(x) + f(y) - f(y_{\varphi(n)})| \\ &\leq |f(x_{\varphi(n)}) - f(x)| + |f(y) - f(y_{\varphi(n)})| \end{aligned}$$

On voit que la convergence des suites $(f(x_{\varphi(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(f(y_{\varphi(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$ vers $f(y) = f(x)$ n'est pas possible car on a une minoration de la distance par ϵ . Cela signifie qu'on a montré l'existence d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de $[a, b]$ - c'est $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ ou $(y_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ - qui converge vers le point $x = y$, mais dont la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers $f(x) = f(y)$. C'est le critère de discontinuité de la fonction f au point x . □

Nous avons vu des fonctions continues mais non uniformément continues sur des intervalles ouverts ; par exemple, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0, 1[$. D'autre part, d'après le théorème de continuité uniforme, une fonction continue sur un intervalle fermé borné est toujours uniformément continue. La question se pose donc : à quelles conditions une fonction est-elle uniformément continue sur un intervalle ouvert borné ? La réponse met en évidence la force de la continuité uniforme, car il sera démontré qu'une fonction définie sur $]a, b[$ est uniformément continue si et seulement si, en ses extrémités, elle peut être définie de manière à produire une fonction continue sur l'intervalle fermé.

Proposition 2.14. *Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $]a, b[$. La fonction est uniformément continue sur l'intervalle $]a, b[$ si et seulement si elle est prolongeable par continuité aux extrémités a et b .*

Démonstration. La condition suffisante \Leftarrow est évidente : si la fonction est prolongeable par continuité aux extrémités en une fonction continue $\bar{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, alors le Théorème 2.13 nous dit que \bar{f} est uniformément continue, et donc $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ aussi. La condition nécessaire \Rightarrow est plus dure à montrer. Supposons que f est uniformément continue sur $]a, b[$. Il faut arriver à montrer qu'elle est prolongeable par continuité aux extrémités a et b . On va juste le montrer en a car l'argument pour b est similaire.

On va montrer que pour n'importe quel choix de suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de $]a, b[$ convergeant vers a , la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une même limite L , qu'on pourra définir comme $\bar{f}(a)$. Le critère séquentiel de la continuité en a sera alors automatiquement satisfait. Donc soit une telle suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de $]a, b[$ convergeant vers a . Comme elle converge, c'est une suite de Cauchy. Nous allons montrer que la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, et donc qu'elle converge.

Let $\epsilon > 0$. Comme f est uniformément continue sur $]a, b[$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in]a, b[$, si $|x - y| < \delta$ alors $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Comme $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $p, q \geq N$, on a $|x_p - x_q| < \delta$. On en déduit que pour tout $p, q \geq N$, on a $|f(x_p) - f(x_q)| < \epsilon$. La suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait le critère de Cauchy, et elle est donc convergente. On note L_x sa limite.

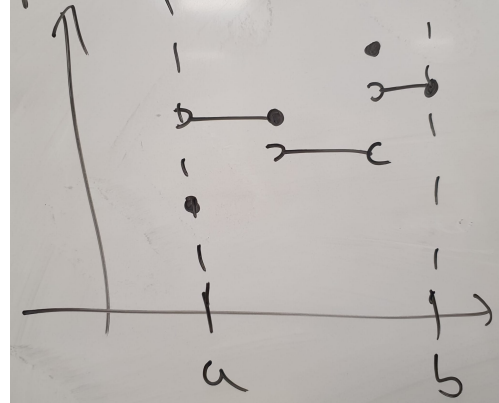
Prenons une autre suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de $]a, b[$ qui converge vers a . D'après l'argument précédent, la suite $(f(y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, vers une limite L_y . Montrons que $L_y = L_x$. Soit $\epsilon > 0$ et $\delta > 0$ les deux choix de variables données par l'uniforme continuité de f sur $]a, b[$. Nous avons $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - y_n) = a - a = 0$, cela veut dire qu'à partir d'un certain $N \in \mathbb{N}$, on a $|x_n - y_n| < \delta$. Cela implique que pour tout $n \geq N$, on a $|f(x_n) - f(y_n)| < \epsilon$. En faisant tendre n vers l'infini on voit que $|L_x - L_y| < \epsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\epsilon > 0$, on a que $L_x = L_y$. En conclusion, on voit que la fonction f est prolongeable par continuité en a , ce qui conclut la preuve. \square

Exemple 2.15. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas prolongeable par continuité en 0 donc n'est pas uniformément continue.

Dans de nombreuses applications, il est important de pouvoir approximer des fonctions continues par des fonctions de nature plus élémentaire, comme des polynômes, des fonctions linéaires par morceaux ou des fonctions en escalier. Bien qu'il existe diverses définitions qui peuvent être utilisées pour rendre le mot « approximer » plus précis, l'une des plus naturelles (ainsi que l'une des plus importantes) consiste à exiger qu'en tout point du domaine donné, la fonction d'approximation ne diffère pas de la fonction donnée de plus qu'une distance $\epsilon > 0$ prédéfinie (qui ne dépend pas du point considéré).

Définition 2.16. Une fonction $s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée fonction étagée ou en escalier si elle a seulement un nombre fini de valeurs, chacune de ces valeurs étant prise sur un nombre fini d'intervalles non vides de $[a, b]$. Une fonction définie sur un intervalle I quelconque est appelée fonction étagée ou en escalier si sa restriction à tout segment de I est étagée dans le sens ci-dessus.

Remarque 2.17. On prend un segment $[a, b]$ comme domaine de définition de s , cela veut dire qu'on assigne une valeur $s(x)$ à tout point $x \in [a, b]$, et que la fonction est nécessairement discontinue dès qu'elle prend plus de deux valeurs différentes. D'autre part, et ceci est très important, on autorise les intervalles sur lesquels s est constante à être des points (on parle d'intervalles *dégénérés*). On peut donc avoir un nombre fini de valeurs qui sont prises en des points isolés.



Exemple 2.18. La fonction de Heaviside est une fonction en escalier, et la valeur prise en $x = 0$ est prise en un seul point (intervalle dégénéré) :

$$H : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

La fonction partie entière, prise sur n'importe quel intervalle borné de \mathbb{R} , est une fonction en escalier.

Exemple 2.19. La fonction indicatrice des rationnels

$$\mathbf{1}_{\mathbb{Q}} : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

n'est pas une fonction étagée même si elle ne prend que deux valeurs, car ces valeurs ne sont pas prises sur des intervalles.

Nous pouvons préciser le sens de la définition dans le cas où d'un segment $[a, b]$. On dit qu'une fonction $s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est *en escalier* si :

1. il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $n + 1$ points du segment $[a, b]$, tels que :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

2. s est constante sur tous les intervalles ouverts du type $]x_{i-1}, x_i[$, pour $1 \leq i \leq n$.

Les valeurs de s au point a est m_0 , au point b est m_n , et au point x_i (pour $1 \leq i \leq n - 1$) peut être différente de celles prises sur les intervalles ouverts, car dans la Définition 2.16 on autorise les intervalles à être dénégérés, i.e. des points.

Proposition 2.20. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur le segment $[a, b]$, et soit $\epsilon > 0$. Alors il existe une fonction en escalier $s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in [a, b] \quad |f(x) - s(x)| < \epsilon$$

Démonstration. D'après le Théorème 2.13, la fonction f est uniformément continue. Il existe donc $\delta > 0$ telle que pour tout $x, y \in [a, b]$, si $|x - y| < \delta$ alors $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Posons $N = E\left(\frac{b-a}{\delta}\right) + 1$. Par la propriété de la fonction partie entière – c'est à dire $E(x) \leq x < E(x) + 1$, on déduit que $\frac{b-a}{N} < \delta$. On divise le segment $[a, b]$ en N intervalles de longueur $\frac{b-a}{N}$:

$$I_1 = \left[a, a + \frac{b-a}{N} \right], I_2 = \left[a + \frac{b-a}{N}, a + 2\frac{b-a}{N} \right], \dots, I_N = \left[a + (N-1)\frac{b-a}{N}, b \right]$$

Pour tout $1 \leq k \leq N$, on pose $s|_{I_k} = f\left(a + k\frac{b-a}{N}\right)$ (la valeur de f à l'extrémité droite de I_k). Cela définit une fonction en escalier $s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, qui est constante sur chaque intervalle. Comme la longueur de chaque intervalle est strictement inférieure à δ , on déduit que $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ pour tout $x, y \in I_k$ et $1 \leq k \leq N$. En particulier pour $y = a + k\frac{b-a}{N}$ on a :

$$|f(x) - s(x)| = \left| f(x) - f\left(a + k\frac{b-a}{N}\right) \right| < \epsilon$$

Ceci signifie que $|f(x) - s(x)| < \epsilon$ pour tout $x \in [a, b]$. □

Remarque 2.21. En utilisant la Proposition 2.20 de façon répétée, pour différentes valeurs de $\epsilon = 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$, on peut construire pour chaque choix de $n \in \mathbb{N}^*$ une fonction en escalier $s_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in [a, b], \quad |f(x) - s_n(x)| < \frac{1}{n}$$

On dit que la suite de fonctions $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

Remarque 2.22. Il existe des théorèmes d'approximation plus forts. En particulier on peut approximer toute fonction continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ par une fonction linéaire par morceaux, avec une marge d'erreur $\epsilon > 0$, ou bien encore par un polynôme (Théorème de Weierstrass). Comme dans la remarque précédente, en faisant varier $\epsilon > 0$ comme $\frac{1}{n}$, cela permet de définir une suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $[a, b]$ qui converge uniformément vers f (voir MAT201).

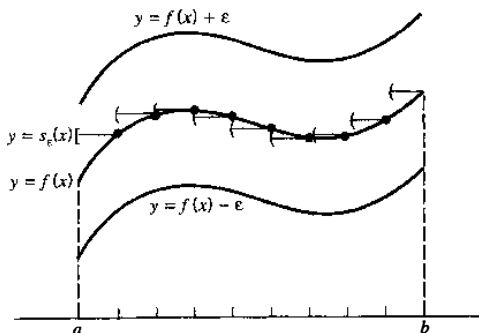


Figure 5.4.4 Approximation by step functions

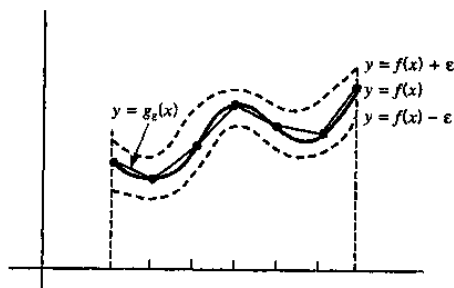


Figure 5.4.5 Approximation by piecewise linear function

2.2 Théorie de l'intégration de Darboux-Riemann

L'histoire de l'intégration est ancienne : Archimède faisait le volume de la sphère par une somme de fines tranches. Newton (XVIIème siècle) comprend que l'intégration (aire sous une courbe) et la dérivation (pente de la tangente) sont des opérations opposées. Cauchy dans son cours de l'Ecole Polytechnique de 1821 donne la définition de l'intégrale des fonctions continues sur un segment $[a, b]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il subdivise le segment $[a, b]$ en n intervalles délimités par des nombres $a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \dots < x_{n-1}^{(n)} < x_n^{(n)} = b$. L'indice supérieur indique combien d'intervalles on a et l'indice inférieur numérote les intervalles : $I_1^{(n)} =]x_0, x_1[$, \dots , $I_n^{(n)} =]x_{n-1}, x_n[$. On définit la somme finie suivante :

$$S_n = (x_1 - x_0)f(x_1^{(n)}) + \dots + (x_n - x_{n-1})f(x_n^{(n)}) = \sum_{k=1}^n |I_k^{(n)}| f(x_k^{(n)})$$

où on note $|I_k^{(n)}| = x_k - x_{k-1}$ la longueur de l'intervalle $I_k^{(n)}$. Lorsque n tend vers l'infini et que $\max_{1 \leq k \leq n} |I_k^{(n)}|$ tend vers 0, Cauchy montre que par uniforme continuité, la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite finie, qu'il note $\int_a^b f(x)dx$.

Riemann dans son Mémoire d'Habilitation sur les séries trigonométriques de 1854 définit une intégrale pour certaines fonctions bornées sur un segment $[a, b]$, qui inclut le cas des fonctions continues fait par Cauchy. Il reprend l'idée d'une subdivision du segment $[a, b]$, mais cette fois-ci, comme on ne peut pas supposer que f est continue, il écrit la somme comme :

$$S_n = \sum_{k=1}^n |I_k^{(n)}| f(\chi_k^{(n)})$$

où $\chi_k^{(n)}$ est un point de l'intervalle $I_k^{(n)}$. La différence avec la définition de Cauchy est qu'on prend un point de l'intervalle, pas le point du bord droit. Si la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite finie quand n tend vers l'infini et que $\max_{1 \leq k \leq n} |I_k^{(n)}|$ tend vers 0, et ce indépendamment du choix de $\chi_k^{(n)}$, alors on dit que cette limite est l'intégrale de f sur $[a, b]$. Toute fonction continue sur $[a, b]$ est intégrable dans le sens de Riemann et son intégrale de Riemann coïncide avec celle de Cauchy. Plus tard Darboux donne une approche différente mais plus simple de cette intégrale qui a la propriété qu'une fonction est Darboux-intégrable si et seulement si elle est Riemann-intégrable. De plus la définition de Darboux est facilement extensible à l'intégrale de Stieltjes.

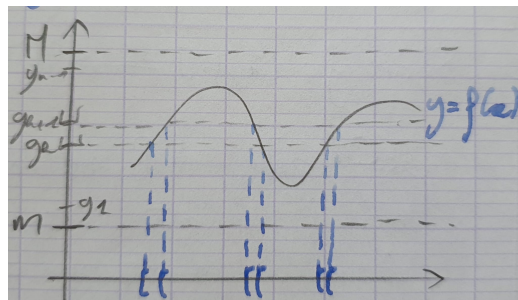
Au début du XXème siècle, Lebesgue améliore encore la théorie de l'intégration en changeant de perspective : au lieu d'intégrer avec des tranches verticales, il intègre avec des tranches horizontales. Cela permet d'étendre l'intégrale à toute fonction bornée définie sur un espace topologique à valeurs dans \mathbb{R} . Prenons le cas d'une fonction bornée sur $[a, b]$. Comme elle est bornée, l'image de f est incluse dans un intervalle $]m, M[: f([a, b]) \subset]m, M[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on prend une subdivision de l'intervalle $]m, M[$ en n intervalles définis par les points suivants $m = y_0^{(n)} < y_1^{(n)} < \dots < y_{n-1}^{(n)} < y_n^{(n)} = M$. On regarde la préimage $f^{-1}(]y_{k-1}, y_k])$ et Lebesgue lui attribue une mesure $\mu_k^{(n)}$ qui généralise la longueur d'un intervalle. On pose ensuite :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \mu_k^{(n)} y_k^{(n)}$$

L'intégrale de Lebesgue, si elle existe, est la limite de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini et que $\max_{1 \leq k \leq n} \mu_k^{(n)}$ tend vers 0. Toute fonction Riemann-intégrable est Lebesgue-intégrable et leurs intégrales coïncident. Par contre il existe des fonctions Lebesgue-intégrables qui ne sont pas Riemann-intégrable, comme la fonction indicatrice de \mathbb{Q} sur $[0, 1]$.

Pour comprendre la philosophie derrière l'intégration de Riemann versus celle de Lebesgue, on a l'analogie suivante : à la fin de la journée, un marchand a deux façons de compter son argent :

- il prend les pièces comme elles viennent et somme leur valeur une par une (Riemann),
- il range les pièces en plusieurs tas selon leurs valeurs, et compte l'argent tas par tas (Lebesgue).



Dans notre approche nous n'allons pas utiliser la méthode de Riemann – très riche mais compliquée à mettre en place – mais la méthode de Darboux, qui commence par définir l'intégrale supérieure et inférieure d'une fonction bornée sur un segment. Une telle fonction est dite *ntégrable*

si l'intégrale supérieure et l'intégrale inférieure coïncident. L'intégrale de f sera alors définie comme étant cette valeur commune. Une fonction est intégrable avec la méthode de Darboux si et seulement si elle est intégrable avec la méthode de Riemann. L'intégrale de Lebesgue sera vue plus tard dans le cursus car elle sollicite des notions de topologie plus compliquée. Par contre notons l'existence d'une variante, appelée intégrale de Kurzweil-Henstock, qui est aussi puissante que l'intégrale de Lebesgue, mais qui est compréhensible par quiconque a étudié les intégrales de Riemann avec l'approche de Riemann.

Rappelons qu'une fonction $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *étagée* si elle prend seulement un nombre fini de valeurs, chacune de ces valeurs étant prise sur un nombre fini de sous-intervalles non vides de $[a, b]$ et dans un nombre fini de points isolés. Notamment, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $n + 1$ points du segment $[a, b]$, tels que :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

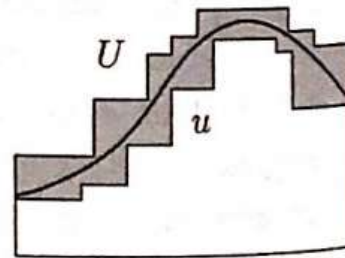
Si u est étagée, alors pour tout $1 \leq i \leq n$, il existe $m_i \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) = m_i$ pour tout $x \in]x_{i-1}, x_i[$. La valeur de u aux points x_i peut être différente de m_i et m_{i+1} . Toute fonction étagée $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ admet une intégrale, définie par :

$$\int_a^b u = \int_a^b u(x) dx = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1})$$

On peut vérifier que la valeur de cette intégrale ne dépend pas de la subdivision choisie.

Les fonctions étagées nous permettent de définir les intégrales pour des fonctions plus générales. Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est *intégrable* (au sens de Riemann) si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe deux fonctions étagées $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $U : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$u \leq f \leq U \quad \text{and} \quad \int_a^b (U - u)(x) dx \leq \epsilon$$



Notons que la première condition implique que f est bornée car les fonctions étagées ne prennent qu'un nombre fini de valeurs. Nous allons maintenant donner une caractérisation différente mais équivalente des fonctions intégrables, qui nous permettent de définir la valeur de l'intégrale d'une fonction intégrable. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. Alors il existe au moins une fonction étagée $u \leq f$ et une fonction étagée $U \geq f$. Les intégrales des fonctions étagées sur $[a, b]$ sont bien définies donc on peut définir les deux sous-ensembles de \mathbb{R} suivants, qui sont non-vides :

$$A = \left\{ \int_a^b u(x) dx \text{ avec } u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ fonction étagée telle que } u \leq f \right\}$$

$$B = \left\{ \int_a^b U(x) dx \text{ avec } U : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ fonction étagée telle que } U \geq f \right\}$$

Pour tout $\alpha \in A$, il existe une fonction étagée $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\alpha = \int_a^b u$, et pour tout $\beta \in B$, il existe une fonction étagée $U : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\beta = \int_a^b U$. Comme par définition $u \leq f \leq U$, on a donc $u \leq U$ et donc en intégrant on a que $\alpha \leq \beta$. On en déduit que tous les éléments de A sont inférieurs ou égaux aux éléments de B . En passant à la borne supérieure et inférieure, on en déduit que $\sup(A) \leq \inf(B)$.

Définition 2.23. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. On appelle *intégrale inférieure* de f la borne supérieure $\sup(A)$ et *intégrale supérieure* de f la borne inférieure $\inf(B)$, et on note :

$$\int_{[a,b]}^- f = \sup(A) \quad \text{et} \quad \int_{[a,b]}^+ f = \inf(B)$$

La fonction f est dite Darboux-Riemann-intégrable ou simplement intégrable si $\int_{[a,b]}^- f = \int_{[a,b]}^+ f$. Dans ce cas, ce nombre réel est appelé intégrale de f sur $[a, b]$ et noté

$$\int_{[a,b]} f \quad \text{ou} \quad \int_a^b f \quad \text{ou bien} \quad \int_a^b f(x)dx$$

On note $\mathcal{R}([a, b])$ l'ensemble des fonctions intégrables sur $[a, b]$. Par convention, $\int_a^a f = 0$, et si $a < b$ on note $\int_b^a f = -\int_a^b f$.

Remarque 2.24. L'intégrale de $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ correspond à l'aire sous la courbe du graphe de f entre les bornes a et b .

On peut montrer que cette définition de Riemann-intégrabilité avec l'égalité $\sup(A) = \inf(B)$ est équivalente à celle qu'on a donnée plus haut, car la preuve se fait avec les ϵ et la définition des bornes supérieures et inférieures. Et cela donne par ailleurs le résultat suivant :

Proposition 2.25. *Deux fonctions intégrables qui diffèrent en un nombre fini de points ont la même intégrale.*

Démonstration. La définition de l'intégrale des fonctions étagées nous confirme que la seule chose importante est les valeurs prises par ces fonctions sur des intervalles, pas sur des points isolés en nombre fini. \square

Attention, toute fonction bornée sur $[a, b]$ n'est pas intégrable mais certaines classes de fonctions assez utiles le sont comme illustré par les exemples suivants, dont le résultat suivant central pour beaucoup de résultats.

Proposition 2.26. *Toute fonction continue sur le segment $[a, b]$ est intégrable, et son intégrale est l'aire sous la courbe.*

Démonstration. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors elle est uniformément continue. D'après la Proposition 2.20, on sait que pour tout $\epsilon > 0$, il existe une fonction en escalier $s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $|f(x) - s(x)| \leq \epsilon$ pour tout $x \in [a, b]$. Dans la preuve de cette proposition, on a construit s explicitement. On peut voir qu'on peut modifier cette preuve à la marge pour construire une fonction s étagée qui est telle que $s \leq f$ ou $s \geq f$, au choix. Par exemple, soit $\epsilon > 0$. Si on reprend la division de $[a, b]$ par N segments I_1, \dots, I_N comme dans la preuve de la Proposition 2.20, on peut poser $u|_{I_k} = \inf_{x \in I_k} f(x)$ et $U|_{I_k} = \sup_{x \in I_k} f(x)$. Dans ce cas, les fonctions $u, U : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sont étagées et $u \leq f \leq U$ de même qu'on a les deux conditions suivantes pour tout $x \in [a, b]$ (voir la justification dans la preuve de la Proposition 2.20) :

$$|f(x) - u(x)| \leq \epsilon \quad \text{et} \quad |f(x) - U(x)| \leq \epsilon$$

De ce fait, nous avons donc $|U(x) - u(x)| = |U(x) - f(x) + (f(x) - u(x))| \leq |f(x) - U(x)| + |f(x) - u(x)| \leq 2\epsilon$. Cela nous permet de majorer l'intégrale suivante :

$$\int_a^b (U - u) = \sum_{k=1}^N |I_k| (U|_{I_k} - u|_{I_k}) \leq \sum_{k=1}^N |I_k| 2\epsilon = 2\epsilon(b - a)$$

Quitte à avoir commencé la preuve avec $\frac{\epsilon}{2(b-a)}$ au lieu de ϵ , l'inégalité ci-dessus remplit les conditions de la définition d'une fonction intégrable. On a donc prouvé le résultat. \square

Proposition 2.27. Pour toute fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue de signe constant, on a l'équivalence suivante :

$$\int_a^b f(x)dx = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad f(x) = 0 \text{ pour tout } x \in [a, b]$$

Exemple 2.28. Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *continue par morceaux* si

- il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $n + 1$ points du segment $[a, b]$, tels que :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

- la restriction de f à chaque intervalle ouvert $]x_{k-1}, x_k[$ est continue et prolongeable par continuité aux extrémités gauche et droite.

Attention, on accepte en général que pour tout $0 \leq k \leq n$, la valeur de $f(x_k)$ peut être différente de $\lim_{\substack{x \rightarrow x_k \\ x > x_k}} f(x)$ soit à $\lim_{\substack{x \rightarrow x_k \\ x < x_k}} f(x)$. Une définition restreinte de la continuité par morceaux exige parfois que la valeur de f aux points x_k soit l'une ou l'autre limite. On voit directement que les fonctions continues par morceaux qui sont constantes par morceaux sont les fonctions en escalier. Les fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ sont notées $\mathcal{C}_m([a, b])$ et sont intégrables car leur restriction sur chaque intervalle $]x_{k-1}, x_k[$ est continue et prolongeable par continuité aux bords. Or on sait qu'une fonction continue sur un segment est intégrable et on peut donc définir l'intégrale de la fonction f sur $[a, b]$ comme :

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx$$

Exemple 2.29. Les fonctions monotones sur le segment $[a, b]$ ont une infinité au plus dénombrable de discontinuités (voir Théorème 5.6.4 du Bartle-Sherbert). Par exemple prenons $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ croissante et soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $0 \leq k \leq n$ on pose $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$. On définit deux fonctions étagées $\varphi_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $\psi_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} f(x_k) & \text{si } x \in [x_{k-1}, x_k[, \forall 1 \leq k \leq n \\ f(b) & \text{si } x = b \end{cases}$$

$$\psi_n(x) = \begin{cases} f(x_{k+1}) & \text{si } x \in [x_{k-1}, x_k[, \forall 1 \leq k \leq n \\ f(b) & \text{si } x = b \end{cases}$$

Donc au final on a l'inégalité $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$, cela étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et on a :

$$\int_a^b \psi_n - \int_a^b \varphi_n = \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} f(x_k) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f(x_k) = \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Exemple 2.30. La fonction indicatrice des rationnels :

$$\mathbf{1}_{\mathbb{Q}} : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

est bornée, elle n'est pas Darboux-Riemann intégrable mais elle est Lebesgue-intégrable. Calculons l'intégrale inférieure de cette fonction. Soit φ une fonction étagée telle que $\varphi \leq \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$, et soit $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ une subdivision adaptée à φ . Comme $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans \mathbb{R} , il existe un nombre irrationnel dans tout intervalle ouvert $]x_k, x_{k+1}[$. Comme φ est constante sur cet intervalle, $\varphi \leq 0$. La fonction nulle a cette propriété donc de cela on déduit que $\int_{[0,1]}^- \mathbf{1}_{\mathbb{Q}} = 0$. Par la densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} , on déduit que $\int_{[0,1]}^+ \mathbf{1}_{\mathbb{Q}} = 1$. Les deux intégrales supérieures et inférieures ne sont pas égales donc l'indicatrice n'est pas Darboux-Riemann-intégrable (en outre, elle est nulle part continue).

Exemple 2.31. Voici un exemple non trivial de fonction qui ressemble à la fonction indicatrice des rationnels mais qui est Darboux-Riemann-intégrable. Définissons la fonction positive suivante :

$$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, p \wedge q = 1 \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Nous avons que $0 \leq f$. Soit $\epsilon > 0$. Montrons qu'il existe une fonction étagée $U \geq f$ telle que $\int_0^1 (U - f) \leq \epsilon$. On aura alors que f est intégrable sur $[0, 1]$ et son intégrale est nulle. Posons :

$$A_\epsilon = \{x \in [0, 1] \text{ tel que } f(x) \geq \epsilon\}$$

C'est un sous-ensemble fini de $[0, 1]$ car 1. il ne contient que des rationnels, 2. ce sont les rationnels dont le dénominateur est majoré par $\frac{1}{\epsilon}$. Ils sont en nombre fini. Définissons la fonction en escalier suivante :

$$U : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A_\epsilon \\ \epsilon & \text{sinon} \end{cases}$$

On a par construction $f \leq U$, et $\int_0^1 U = \epsilon$ car U diffère de la fonction constante égale à ϵ en un nombre fini de points (ceux de A_ϵ).

Remarque 2.32. Dans l'exemple précédent, la fonction f est continue exactement en les nombres irrationnels. Un des théorèmes de Baire établit qu'il n'existe aucune fonction sur $[0, 1]$ continue exactement en les nombres rationnels.

Pour la culture générale et approfondir la différence entre les deux exemples précédents, nous donnons un critère de détermination pour savoir si une fonction est intégrable ou non. Une partie $X \subset [a, b]$ est dite *négligeable* (au sens de Lebesgue) si :

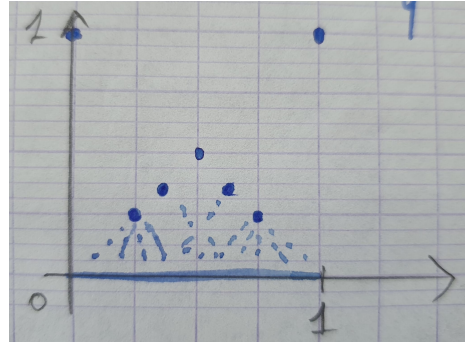
$$\forall \epsilon > 0, \exists (I_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ une suite d'intervalles ouverts tels que } \begin{cases} X \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \\ \sum_{n \in \mathbb{N}} |I_n| \leq \epsilon \end{cases}$$

Théorème de Lebesgue. Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bornée est intégrable si et seulement si l'ensemble des discontinuités de f est négligeable.

Remarque 2.33. Il existe encore d'autres types d'intégrales comme l'intégrale de Riemann-Stieltjes qui est une précurseuse de l'intégrale de Lebesgue, où on intègre f en utilisant une autre fonction g , et cette intégrale a une interprétation géométrique entre celle de Riemann et de Lebesgue (voir Wikipedia). Il existe aussi l'intégrale de Kurzweil-Henstock qui simplifie l'intégrale de Lebesgue pour la rendre accessible aux élèves de Licence.

Proposition 2.34. L'ensemble $\mathcal{R}([a, b])$ des fonctions intégrables sur $[a, b]$ est une \mathbb{R} -algèbre qui contient les fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$, et l'application $\int : \mathcal{R}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \int_a^b f$ est une forme linéaire positive, i.e. si $f \leq g$ alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Démonstration. Le premier point veut dire que $\mathcal{R}([a, b])$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel muni de la multiplication entre deux éléments (la multiplication des fonctions). Plus précisément, si f et g



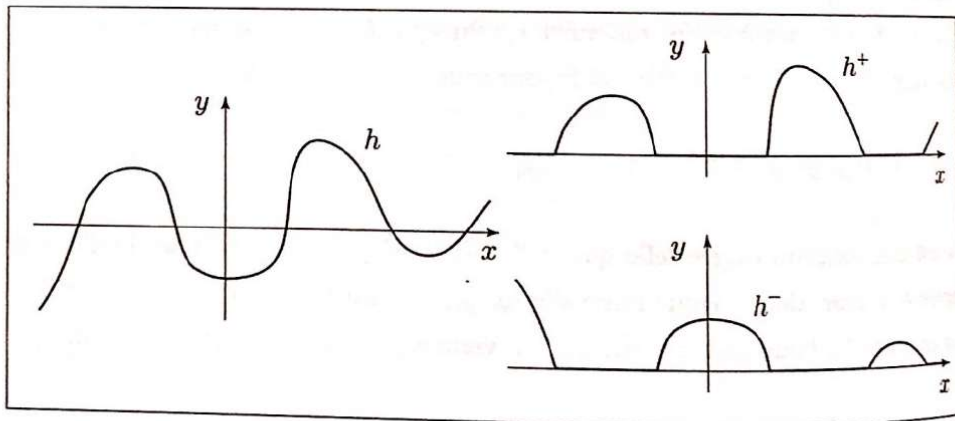
sont intégrables et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f + \mu g$ est aussi intégrable (espace vectoriel) et on a comme intégrale : $\int_a^b \lambda f + \mu g = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$ (f est une forme linéaire). Pour montrer que le produit de deux fonctions intégrables est intégrable, nous pouvons avancer comme suit : supposons que f est positive et que $0 \leq u \leq f \leq U \leq M$, où $M = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$ (c'est toujours possible). Par positivité de ces fonctions, on a $u^2 \leq f^2 \leq U^2$ et $0 \leq \int U^2 - u^2 = \int (U-u)(U+u) \leq 2M \int (U-u)$. Donc la fonction f^2 est intégrable car on peut rendre l'intégrale $\int U - u$ aussi petite que l'on veut. Ensuite il suffit d'écrire que $fg = \frac{1}{2} ((f+g)^2 - f^2 - g^2)$ et comme le membre de droite est intégrable, le membre de gauche est aussi intégrable. Cela nous donne que $\mathcal{R}([a, b])$ est une algèbre. \square

Proposition 2.35. *Si la fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable alors $|f|$ est intégrable.*

Démonstration. On peut décomposer toute fonction $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ comme la différence de deux fonctions positives :

$$\begin{array}{ccc}
 h^+ : [a, b] & \longrightarrow & \mathbb{R} & & h^- : [a, b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 x & \longmapsto & \begin{cases} h(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } h(x) \leq 0 \end{cases} & & x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } h(x) \geq 0 \\ -h(x) & \text{si } f(x) \leq 0 \end{cases}
 \end{array}$$

Ce sont deux fonctions positives et on a alors $h(x) = h^+(x) - h^-(x)$ et $|h(x)| = h^+(x) + h^-(x)$ pour tout $x \in [a, b]$.



Supposons que f est intégrable. Supposons que $u, U : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions étagées telles que $u \leq f \leq U$ et $\int_a^b (U - u) \leq \epsilon$. On peut vérifier que :

$$u^+ \leq f \leq U^- \quad \text{et} \quad U^- \leq f^- \leq u^-$$

On a donc :

$$\int_a^b (U^+ - u^+) \leq \int_a^b (U - u) \leq \epsilon \quad \text{et} \quad \int_a^b (U^- - u^-) \leq \int_a^b (U - u) \leq \epsilon$$

Ceci nous dit que les fonctions f^+ et f^- sont intégrables. Dans ce cas, la fonction $|f|$ est intégrable, comme somme de deux fonctions intégrables. \square

Proposition 2.36. *Nous avons trois relations importantes :*

1. *pour toute fonction $f \in \mathcal{R}([a, b]) \cap \mathcal{R}([b, c])$, on a l'identité de Chasles :*

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$$

2. pour toute fonction $f \in \mathcal{R}([a, b])$, on a l'inégalité triangulaire continue :

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

3. si $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ alors on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left| \int_a^b fg \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2} \sqrt{\int_a^b g^2}$$

et c'est une égalité si et seulement si f et g sont proportionnelles.

Démonstration. La première identité est une application directe de la définition d'être une fonction intégrable. Pour la deuxième on sait que si f est intégrable alors $|f|$ l'est aussi. On a l'encadrement $-|f| \leq f \leq |f|$, ce qui donne en intégrant et en utilisant la linéarité de l'intégrale :

$$-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$$

Le membre de gauche est négatif et celui de droite est positif, cela donne bien l'inégalité triangulaire.

Pour l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on peut procéder en considérant la fonction positive suivante :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \lambda &\longmapsto \int_a^b (f - \lambda g)^2 \end{aligned}$$

C'est un polynôme de degré 2 car $\varphi(\lambda) = \lambda^2 \int_a^b g^2 - 2\lambda \int_a^b fg + \int_a^b f^2$. Si jamais $\int_a^b g^2 = 0$, alors φ est une fonction linéaire donc son graphe est une droite. Comme elle est positive, elle est nécessairement constante donc sa pente est nulle, ce qui montre que $\int_a^b fg = 0$. L'inégalité est donc trivialement vérifiée. Maintenant, on suppose au contraire que $\int_a^b f^2 \neq 0$. La fonction φ est un polynôme positif de degré 2 donc son graphe est dans le demi-plan supérieur et donc ce polynôme n'admet pas de solution réelle. Le discriminant est donc nécessairement négatif ou nul. Pour un polynôme $A\lambda^2 + B\lambda + C$, le discriminant est $\Delta = B^2 - 4AC$. Ici nous avons donc que le discriminant est négatif ou nul :

$$(-2)^2 \left(\int_a^b fg \right)^2 - 4 \left(\int_a^b f^2 \right) \left(\int_a^b g^2 \right) \leq 0$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz est donc vraie dans tous les cas. \square

Remarque 2.37. L'inégalité de Cauchy-Schwarz est une inégalité plus générale et fondamentale des *espaces de Hilbert*, c'est à dire des espaces vectoriels muni d'un produit scalaire $\langle -, - \rangle$. Pour tous vecteurs u et v de cet espace, on a :

$$|\langle u, v \rangle| \leq \sqrt{\langle u, u \rangle} \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

Nous présentons maintenant l'un des résultats les plus profonds de l'Analyse moderne, qui traverse les mathématiques depuis le Moyen-Âge, et qui a des généralisations dans de multiples domaines. C'est l'idée de voir l'intégration et la dérivation comme deux opérations inverses l'une

de l'autre (notamment dans la théorie des algèbres et des groupes de Lie). C'est grâce à ce théorème que Darboux prouve l'idée que la propriété des valeurs intermédiaire n'est pas une propriété des fonctions continues. Le théorème a deux formes différentes et complémentaires : une d'intégration et une de dérivation, et une forme combinée (plus restreinte) qu'on donnera pas souci de clarté. Le premier théorème fondamental stipule que pour une fonction f intégrable sur $[a, b]$, une primitive F peut être obtenue en intégrant f sur un intervalle dont la borne supérieure est variable. Réciproquement, le second théorème fondamental stipule que l'intégrale d'une fonction f sur un intervalle fixé est égale à la variation de toute primitive F entre les extrémités de cet intervalle. Ceci simplifie considérablement le calcul d'une intégrale définie, à condition qu'une primitive puisse être trouvée par intégration symbolique, évitant ainsi l'intégration numérique.

Définition 2.38. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur $[a, b]$. On appelle

— primitive de f toute fonction continue $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur $]a, b[$ telle que :

$$\forall x \in]a, b[, \quad F'(x) = f(x)$$

— intégrale indéfinie de f la fonction $F_0(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in [a, b], \quad F_0(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Exemple 2.39. Prenons comme fonction $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto E(t)$ la fonction partie entière sur le segment $[0, 1]$. L'intégrale indéfinie est la fonction définie par :

$$F_0 : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1] \\ x - 1 & \text{si } x \in [1, 2] \end{cases}$$

C'est une fonction continue mais pas dérivable en 1.

Attention à ce moment, on ne sait pas si l'intégrale indéfinie F_0 est une primitive de la fonction f , et on verra que ce n'est pas forcément le cas. D'autre part, comme les constantes disparaissent à la dérivation, on voit que dès qu'on a une primitive F de f , toute fonction de la forme $F + \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ est aussi une primitive. Il y a en donc au moins une infinité dès qu'on en a une. Ainsi, la question à laquelle répond (partiellement) le premier théorème fondamental de l'analyse est de l'existence des primitives de f , avec comme candidate principale l'intégrale indéfinie de f , et sous quelle condition? La question à laquelle répond le second théorème fondamental de l'analyse est : comment caractériser les primitives de F lorsqu'elles existent, est-ce que toutes les primitives de f sont de la forme $F + \lambda$? Le premier théorème fondamental de l'analyse est un théorème d'existence, et le deuxième théorème fondamental de l'analyse est un théorème d'unicité/caractérisation. Les théorèmes d'existence et d'unicité sont très importants en mathématiques pour bien caractériser les objets qu'on étudie.

Théorème fondamental de l'analyse (existence de primitives). Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur $[a, b]$. Alors

- l'intégrale indéfinie de f est une fonction continue sur $[a, b]$ qui s'annule en a , et
- si f est continue en $c \in]a, b[$, alors l'intégrale indéfinie $F_0 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en c et $F_0'(c) = f(c)$.

Nous voyons qu'être intégrable ne veut pas forcément dire admettre une primitive. En effet pour admettre une primitive, il faut pouvoir s'écrire comme la dérivée d'une fonction. Or Gaston Darboux a montré que toute fonction qui s'écrit comme la dérivée d'une autre a la propriété

des valeurs intermédiaires. Plus précisément, on dit qu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est *de Darboux* si pour tout segment $[a, b] \subset I$, et pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $x \in [a, b]$ tel que $y = f(x)$. Les fonctions continues sont de Darboux, mais toutes les fonctions de Darboux ne sont pas continues (c'est lui qui l'a démontré en 1875). D'autre part, il a montré que les dérivées de fonctions réelles sont des fonctions de Darboux, et on sait qu'il existe des dérivées qui ne sont pas forcément continues. En tous cas, on voit qu'une condition nécessaire (mais pas suffisante) pour admettre une primitive est donc d'être une fonction de Darboux. La fonction partie entière n'est pas de Darboux donc n'admet pas de primitive mais est intégrable. Par contre on a le résultat suivant :

Corollaire 2.40. *Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors l'intégrale indéfinie de f est une primitive de f (qui s'annule en a).*

Remarque 2.41. Si la fonction f est continue, cette primitive est manifestement de classe \mathcal{C}^1 . Cependant, si la fonction f n'est pas continue, l'intégrale indéfinie peut ne pas forcément être une primitive de f , soit car 1. elle n'est peut être pas dérivable en certains points de $]a, b[$ (voir l'Exemple 2.39), ou bien 2. la dérivée de l'intégrale indéfinie peut exister sur $]a, b[$ mais être différente de la valeur de f en certains de ses points (c'est le cas de la fonction de l'Exemple 2.31).

Théorème fondamental de l'analyse (unicité/caractérisation des primitives). *Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur $[a, b]$, et soit $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une primitive de f sur $[a, b]$. Alors*

$$\forall x \in [a, b], \quad F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt$$

En particulier, pour $x = b$ on a $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

Le deuxième théorème fondamental nous dit que 1. si une primitive existe, alors F_0 est aussi une primitive car $F(x) = F(a) + F_0(x)$, et que 2. toutes les primitives de f sur $[a, b]$ sont du type $F = F_0 + \lambda$, avec $\lambda = F(a) \in \mathbb{R}$. Ce théorème nous permet de caractériser toutes les primitives de f dès qu'il en existe une, c'est donc bien un théorème d'unicité (à une constante d'intégration près). Notons que toutes les primitives sont continues sur $[a, b]$ donc uniformément continues.

Théorème fondamental de l'analyse (combiné). *Soit $f, F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a, b]$, telles que $F(a) = 0$. Alors les deux énoncés suivants sont équivalents :*

- (i) $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in]a, b[$;
- (ii) $F(x) = \int_a^x f$ pour tout $x \in [a, b]$.

Remarque 2.42. Le lien entre intégration et dérivation est très profond en mathématiques et dépasse le cadre de l'analyse réelle. En effet, on peut dériver et intégrer d'autres objets mathématiques, même des espaces ou des opérations! Un exemple connu est le lien entre groupes de Lie et algèbres de Lie (les matrices) : une algèbre de Lie est une dérivation de groupe de Lie, et un groupe de Lie est une intégration d'une algèbre de Lie.

Proposition 2.43. Intégration par parties. *Si $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sont intégrables sur $[a, b]$ et admettent des primitives $F, G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, alors :*

$$\int_a^b F(x)g(x)dx = \left(F(b)G(b) - F(a)G(a) \right) - \int_a^b f(x)G(x)dx$$

Démonstration. Soit $H(x) = F(x)G(x)$ pour $x \in [a, b]$. Alors H est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ et, par la règle du produit, nous avons :

$$\forall x \in [a, b] \quad H(x) = F'(x)G(x) + F(x)G'(x) = f(x)G(x) + F(x)g(x)$$

Comme f, g sont intégrables et F, G sont continues (et donc intégrables) sur $[a, b]$, alors la fonction $fG + Fg$ est intégrable sur $[a, b]$ et $H : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une primitive de la fonction $fG + Fg$. On utilise le deuxième théorème fondamental de l'analyse pour conclure que :

$$H(b) - H(a) = \int_a^b H' = \int_a^b (fG + Fg)$$

C'est bien l'équation de l'intégration par parties. □

Corollaire 2.44. Formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^n sur $[a, b]$. Alors :

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(b-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \int_a^b f^{(n)}(t) \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt$$

Démonstration. D'après le second théorème fondamental de l'analyse nous avons :

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t) dt \tag{2.1}$$

Nous allons faire une intégration par partie en prenant $f_1(t) = f'(t)$ et $g_1(t) = t - b$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \int_a^b f'(t) dt &= \int_a^b f_1(t) g_1'(t) dt = [f_1(b)g_1(b) - f_1(a)g_1(a)] - \int_a^b f_1'(t)g_1(t) dt \\ &= 0 - f'(a)(a-b) - \int_a^b f''(t)(t-b) dt \end{aligned}$$

On obtient donc en remettant dans l'Equation (2.1) :

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \int_a^b f''(t)(b-t) dt$$

On effectue une intégration par partie de l'intégrale en prenant la fonction $f_2(t) = f''(t)$ et $g_2(t) = -\frac{(b-t)^2}{2}$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \int_a^b f''(t)(b-t) dt &= \int_a^b f_2(t) g_2'(t) dt = [f_2(b)g_2(b) - f_2(a)g_2(a)] - \int_a^b f_2'(t)g_2(t) dt \\ &= 0 + f^{(2)}(a) \frac{(b-a)^2}{2} + \int_a^b f^{(3)}(t) \frac{(b-t)^2}{2} dt \end{aligned}$$

On obtient donc en remettant dans l'Equation (2.1) :

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2}(b-a)^2 + \int_a^b f^{(3)}(t) \frac{(b-t)^2}{2} dt$$

Plus généralement si la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégrale est vrai au rang k alors elle est vraie au rang $k + 1$ en faisant une intégration par partie. On procède ainsi de suite jusqu'au dernier rang n . □

Proposition 2.45. Changement de variable. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable, et soit $\varphi : [A, B] \rightarrow [a, b]$ une fonction bijective de classe \mathcal{C}^1 . Alors la fonction $f \circ \varphi \times \varphi' : [A, B] \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable sur $[A, B]$ et :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_A^B f(\varphi(s)) |\varphi'(s)| ds \tag{2.2}$$

Démonstration. Lorsque $\varphi : [A, B] \rightarrow [a, b]$ est bijective, elle est nécessairement strictement croissante ou décroissante. Prenons le cas où $\varphi : [A, B] \rightarrow [a, b]$ est strictement croissante. Dans ce cas $\varphi(A) = a$ et $\varphi(B) = b$ et $|\varphi'(s)| = \varphi'(s)$. Comme f est continue sur $[a, b]$, le premier théorème fondamental de l'analyse nous dit que l'intégrale indéfinie de f sur $[a, b]$ est une primitive de f , notons là F_0 . Maintenant, pour tout $s \in [A, B]$, posons

$$H(s) = F_0(\varphi(s)) = \int_a^{\varphi(s)} f(t)dt$$

On observe que $H(A) = F_0(a) = 0$, et que $H(B) = F_0(b) = \int_a^b f(t)dt$. Comme φ est continue et croissante, la fonction $H : [A, B] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, et même dérivable car la règle des chaînes nous donne, pour tout $s \in]A, B[$:

$$H'(s) = \varphi'(s) \times F_0'(\varphi(s)) = \varphi'(s) \times f(\varphi(s))$$

Dans ce cas, le deuxième théorème fondamental de l'analyse appliquée à la fonction de droite et à sa primitive H nous donne que :

$$\int_A^B \varphi'(s) \times f(\varphi(s))ds = H(B) - H(A) = H(b) - H(a) = \int_a^b f(t)dt - 0$$

C'est le résultat demandé dans le cas où φ est croissante. Dans le cas où $\varphi : [A, B] \rightarrow [a, b]$ est bijective décroissante on a $\varphi(A) = b$ et $\varphi(B) = a$ et $|\varphi'(s)| = -\varphi'(s)$, ce qui donne en suivant le même raisonnement :

$$\int_A^B \varphi'(s) \times f(\varphi(s))ds = H(B) - H(A) = H(a) - H(b) = -(H(b) - H(a)) = -\int_a^b f(t)dt$$

Les deux cas (croissant et décroissant) peuvent être rassemblés dans la formule unique (2.2). \square

Exemple 2.46. Calculons l'intégrale définie $\int_0^1 \ln(1+t^2) dt$. La fonction est continue sur un segment donc intégrable. On ne va pas trouver de primitive car on ne connaît pas de fonction dont la dérivée est $t \mapsto \ln(1+t^2)$. Commençons par faire une intégration par partie. On pose $F(t) = \ln(1+t^2)$ et $G(t) = t$, ce qui donne $F'(t) = \frac{2t}{1+t^2}$ et $G'(t) = 1$. La formule de l'intégration par parties nous donne :

$$\int_0^1 \ln(1+t^2) dt = [t \ln(1+t^2)]_0^1 - \int_0^1 t \frac{2t}{1+t^2} dt = \ln(2) - 2 \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} dt$$

Rappelons que la dérivée de la fonction arctangente est : $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Si on effectue un changement de variable $u = \arctan(t)$ c'est à dire $t = \tan(u)$, on obtient $du = \frac{dt}{1+t^2}$, et donc l'intégrale ci dessus est :

$$\int_0^1 \ln(1+t^2) dt = \ln(2) - 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2(u) du$$

Or nous savons que la dérivée de la fonction tangente est : $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$. On a donc une primitive de la fonction $x \mapsto \tan^2(x)$ qui s'annule en 0, c'est la fonction $x \mapsto \tan(x) - x$ (il suffit de dériver). On a donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2(u) du = [\tan(x) - x]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

et on peut donc conclure :

$$\int_0^1 \ln(1+t^2) dt = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}$$

2.3 Intégrales impropres et curvilignes

Nous allons maintenant étudier les fonctions intégrables sur des intervalles quelconques, c'est à dire potentiellement ouverts à gauche et/ou à droite. Le simple fait d'ouvrir une extrémité d'un segment a des conséquences énormes sur la notion de fonction intégrable. On ne peut plus utiliser la technique de Riemann, et beaucoup des propriétés des fonctions intégrables sur un segment ne sont plus valables sur un intervalle ouvert ou semi-ouvert. En effet, si une fonction tend vers $\pm\infty$ en une borne de l'intervalle d'intégration, alors elle peut être intégrable ou non selon sa vitesse de divergence vers l'infini. Par exemple prenons l'intervalle $]0, 1]$ et les deux fonctions $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ et $t \mapsto \frac{1}{t}$. Ces deux fonctions tendent vers $+\infty$ en 0 mais à des vitesses différentes. Soit $x \in]0, 1]$, on a alors par les primitives suivantes par le second théorème fondamental de l'analyse :

$$2\sqrt{1} - 2\sqrt{x} = \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} \quad \text{et} \quad \ln(1) - \ln(x) = \int_x^1 \frac{dt}{t}$$

On obtient que la première intégrale indéfinie tend vers la limite finie 2 lorsque x tend vers 0, tandis que la deuxième tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0. On dira que la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0, 1]$ mais la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ n'est pas intégrable sur $]0, 1]$. La différence vient du fait que la deuxième fonction tend vers $+\infty$ assez vite et la première fonction assez lentement.

L'étude de l'intégrabilité sur les intervalles quelconques est assez compliquée, c'est pourquoi nous nous limiterons la plupart du temps aux fonctions continues par morceaux sur ces intervalles. On avait donné leur définition sur un segment dans l'Exemple 2.28. On va définir l'intégrabilité des fonctions sur un intervalle quelconque en s'inspirant de ce qu'on a vu dans l'Exemple 2.76. On commence d'abord par étudier les fonctions positives avant d'étudier les fonctions de signe quelconque.

Définition 2.47. Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un intervalle quelconque I est dite continue par morceaux si elle est continue par morceaux sur tout segment de I . On note $\mathcal{C}_m(I)$ l'espace vectoriel de ces fonctions.

Exemple 2.48. La fonction partie entière est continue par morceaux sur \mathbb{R} . Comme autre exemple, définissons la fonction suivante :

$$\begin{aligned} f :]0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{E\left(\frac{1}{x}\right)} \end{aligned}$$

Cette fonction est continue par morceaux. Définissons la fonction suivante :

$$\begin{aligned} \bar{f} : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Cette dernière fonction n'est pas continue par morceaux sur $[0, 1]$ ou sur n'importe quel segment $[0, a]$ avec $0 < a \leq 1$.

Définition 2.49. Soit $f \in \mathcal{C}_m(I)$ une fonction continue par morceaux positive (ou nulle). On dit que f est intégrable ou sommable sur I si

$$\exists M > 0 \text{ tel que } \forall a < b \in I, \int_a^b f \leq M$$

Dans ce cas on définit l'intégrale de f sur l'intervalle I comme le nombre réel positif ou nul :

$$\int_I f = \sup_{a < b \in I} \int_a^b f$$

Exemple 2.50. Soit $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \ln(t)$ et soit $0 < a < b < 1$. Une primitive de f sur tout segment de $]0, 1[$ est la fonction suivante (le vérifier en dérivant) :

$$\begin{array}{ccc} F :]0, 1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \ln(x) - x \end{array}$$

La fonction f est négative donc pour satisfaire la définition, intégrons la fonction $-f$ sur le segment $[a, b]$ en utilisant le second théorème fondamental de l'analyse :

$$\int_a^b -f = -[x \ln(x) - x]_a^b = a \ln(a) - a - (b \ln(b) - b) = a \ln(a) - b \ln(b) + (b - a)$$

Lorsque a tend vers 0, le terme $a \ln(a)$ tend vers 0 car a tend vers 0 plus vite que $\ln(a)$. Lorsque b tend vers 1, le terme $b \ln(b)$ tend vers 0. Donc l'intégrale ci dessus est bornée, donc $-f$ est intégrable sur $]0, 1[$ et on obtient à la limite $\int_0^1 -f = 0 - 0 + (1 - 0) = 1$ ce qui donne donc :

$$\int_0^1 \ln(t) dt = -1$$

Lemme 2.51. *Si l'intervalle I est borné et que $f \in \mathcal{C}_m(I)$ positive est bornée, alors f est intégrable.*

Démonstration. En effet si f est bornée, il existe $M > 0$ telle que $|f| \leq M$. Or la fonction constante égale à M est intégrable sur I car I est borné, donc $|f| = f$ est intégrable. \square

Exemple 2.52. La fonction $f :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right|$ est intégrable.

Lemme 2.53. *Soit $f, g \in \mathcal{C}_m(I)$ deux fonctions positives telles que $f \leq g$. Alors nous avons les deux résultats suivants :*

- Si g est intégrable sur I alors f l'est aussi ;
- Si f n'est pas intégrable sur I alors g ne l'est pas non plus.

Démonstration. Il suffit d'écrire la définition d'être intégrable sur I . \square

Comme l'intégrabilité est une question qui ne se pose qu'aux extrémités ouvertes (gauche et/ou droite) de l'intervalle I , il n'est pas nécessaire d'avoir $f \leq g$ partout sur I , mais juste à l'extrémité ou aux extrémités ouvertes. Plus généralement, on peut adapter le résultat du Lemme 2.53 lorsque $f = O(g)$ ou $f = o(g)$ ou $f \sim g$.

Proposition 2.54. *Soit $f, g \in \mathcal{C}_m(I)$ deux fonctions positives telles que $f = o(g)$ à l'extrémité ou aux extrémités ouvertes de I . Alors nous avons les deux résultats suivants :*

- Si g est intégrable sur I alors f l'est aussi ;
- Si f n'est pas intégrable sur I alors g ne l'est pas non plus.

Soit $f, g \in \mathcal{C}_m(I)$ deux fonctions positives telles que $f \sim g$ à l'extrémité ou aux extrémités ouvertes de I . Alors f est intégrable si et seulement si g est intégrable.

Proposition 2.55. *Soit $f \in \mathcal{C}_m(I)$ positive et soit a un point intérieur à I . Posons $I_a^- = I \cap]-\infty, a]$ et $I_a^+ = I \cap [a, +\infty[$. Alors f est intégrable sur I si et seulement si f est intégrable sur I_a^- et sur I_a^+ et dans ce cas :*

$$\int_I f = \int_{I_a^-} f + \int_{I_a^+} f$$

Exemple 2.56. Prenons la fonction continue positive suivante :

$$f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \frac{\ln(1 + \sqrt{x})}{\sqrt{e^x - \cos(x)}}$$

On va étudier f sur $I_1^- =]0, 1]$ en faisant le développement limité de f en 0. On obtient $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\sqrt{x}}{\frac{x}{2}} = \frac{2}{\sqrt{x}}$. La fonction de droite est intégrable sur $]0, 1]$, donc f est intégrable par la Proposition 2.54. Sur $I_1^+ = [1, +\infty[$, $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \ln(x) e^{-\frac{x}{2}}$, donc $f(x) = \underset{x \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{x^2} \right)$. Or la fonction $g : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable, donc f est intégrable par la Proposition 2.54.

Maintenant essayons de faire sens de l'intégrabilité des fonctions qui ne sont pas positives. Soit $f \in \mathcal{C}_m(I)$ une fonction qui peut changer de signe. On définit les deux fonctions continues par morceaux positives suivantes :

$$f^+ : I \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad f^- : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \longmapsto \max(f(t), 0) \qquad t \longmapsto \max(-f(t), 0)$$

Ces deux fonctions continues par morceaux positives sont telles que :

$$f = f^+ - f^- \quad \text{and} \quad |f| = f^+ + f^-$$

Nous avons l'intuition que la fonction f est intégrable si et seulement si les deux fonctions continues par morceaux positives f^+ et f^- sont intégrables dans le sens de la Définition 2.49. Mais observons que dans ce cas, la fonction $|f|$ est aussi intégrable, comme somme de deux fonctions positives intégrables. Réciproquement, si la fonction $|f|$ est intégrable, et bien comme $f^+ \leq |f|$ et $f^- \leq |f|$ alors par le Lemme 2.53 f^+ et f^- sont intégrables donc f est intégrable. Au final on obtient que f est intégrable si et seulement si $|f|$ est intégrable dans le sens de la Définition 2.49. C'est le sens que nous allons donner à l'intégrabilité de f .

Définition 2.57. On dit que $f \in \mathcal{C}_m(I)$ (de signe quelconque) est intégrable ou de classe L^1 sur I et on note $f \in L^1(I)$ si la fonction $|f|$ est intégrable sur I .

Exemple 2.58. La fonction $f :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est intégrable car $|f|$ est intégrable car bornée sur un intervalle borné.

Exemple 2.59. Prenons la fonction continue suivante :

$$f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \frac{\ln(x)}{x^2 + 1}$$

Pour tout $x \in]0, 1]$, on a $|f(x)| \leq |\ln(x)|$ qui est une fonction intégrable sur $]0, 1[$ (voir Exemple 2.50) donc $|f|$ est intégrable sur $]0, 1]$ par la Proposition 2.60. Sur $[1, +\infty[$, la fonction f est positive et $f(x) = \underset{x \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \right)$, or la fonction $g : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^{-\frac{3}{2}}$ est intégrable, donc f est intégrable par la Proposition 2.54. Par la Proposition 2.55, la fonction f est donc de classe L^1 .

Proposition 2.60. L'ensemble des fonctions de classe L^1 sur I – c'est à dire intégrables sur I – est un \mathbb{R} -espace vectoriel, et l'application $\int : f \mapsto \int_I f$ est une forme linéaire positive, i.e. si $f \leq g$ alors $\int_I f \leq \int_I g$.

Remarque 2.61. Attention, contrairement aux fonctions intégrables sur les segments, le produit de deux fonctions sommables sur I n'est pas sommable sur I . Par exemple prenons le cas de la fonction $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ qui est intégrable sur $]0, 1[$ mais telle que f^2 ne l'est pas. L'espace vectoriel $L^1(I)$ n'est donc pas une algèbre.

Proposition 2.62. *Si f est intégrable sur I , alors $|\int_I f| \leq \int_I |f|$.*

Jusqu'ici nous avons vu la théorie générale de l'intégration sur des intervalles quelconques, mais dans les cas pratiques il faut des techniques de calcul pour évaluer une intégrale. Pour le cas particulier où $I = [a, b[$ avec $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$ ou $I =]a, b]$ avec $a \in \mathbb{R}$ ou $a = -\infty$, nous pouvons utiliser la convergence de l'intégrale indéfinie. Prenons par exemple le cas $I = [a, b[$ avec une fonction $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux positive, et considérons l'intégrale indéfinie suivante :

$$\begin{aligned} F : [a, b[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_a^x f(t)dt \end{aligned}$$

Alors la fonction F (qui s'annule en a) est croissante car la positivité de f implique que (attention à l'ordre des bornes!) :

$$F(y) - F(x) = \int_x^y f(t)dt \geq 0$$

Donc la fonction $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ admet une limite finie en b si et seulement si F est majorée, sinon F tend vers $+\infty$ en b .

Proposition 2.63. *Soit $f \in \mathcal{C}_m([a, b[)$ positive, avec $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$. Alors f est intégrable sur $[a, b[$ (dans le sens de la Définition 2.49) si et seulement si F admet une limite finie en b . Si tel est le cas :*

$$\int_{[a, b[} f = \lim_{x \rightarrow b} F(x)$$

Remarque 2.64. Remarquons que si $b \in \mathbb{R}$ est fini, et que F admet une limite finie en b (donc f est intégrable sur $[a, b[$), alors F est prolongeable par continuité en b , ce qui correspond à l'égalité des intégrales sur $[a, b[$ et $[a, b]$:

$$\int_{[a, b[} f = \lim_{x \rightarrow b} F(x) = F(b) = \int_{[a, b]} f$$

On voit que le nouveau concept d'intégrabilité ou de sommabilité préserve et prolonge l'intégration au sens de Darboux-Riemann pour les fonctions continues par morceaux positives.

Corollaire 2.65. *Soit $f \in \mathcal{C}_m([a, b[)$ positive et intégrable, avec $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$. Alors nous avons la limite suivante :*

$$\int_x^b f \xrightarrow{x \rightarrow b} 0$$

Démonstration. Avec la formule de Chasles, nous avons l'encadrement suivant : $\int_x^b f = \int_a^b f - \int_a^x f$ Le membre de droite tend vers 0 donc nous avons le résultat. \square

La Proposition 2.63 et le Corollaire 2.65 sont adaptables au cas $I =]a, b]$ et on a que f est intégrable si et seulement si la fonction $x \mapsto \int_x^b f(t)dt$ converge quand x tend vers a , et l'intégrale $\int_{]a, b]} f$ est cette limite. Ce type d'intégrale est plus rare cependant. La Définition 2.49 est valide pour tout type d'intervalle, et la Proposition 2.63 est valide que pour les intervalles semi-ouverts à gauche ou à droite. Cela couvre cependant la plupart des cas, et notamment des cas très importants, comme nous allons le voir par la suite.

Proposition 2.66. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, alors la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable dans les cas suivant :

1. sur tout intervalle $]0, a]$ si $\alpha < 1$,
2. sur tout intervalle $[a, +\infty[$ si $\alpha > 1$.

Démonstration. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, et étudions la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ et regardons sa condition d'intégration sur $]0, 1]$ et sur $[1, +\infty[$, car la différence avec $]0, a]$ et sur $[a, +\infty[$ est finie.

- Si $\alpha = 1$, par la Définition 2.81, on a que l'intégrale indéfinie $\int_x^1 \frac{dt}{t}$ est égale au logarithme, dont on sait qu'il diverge en 0 et en $+\infty$. Connaissant les limites du logarithme en 0 et en $+\infty$, on déduit que l'intégrale indéfinie $\int_1^x \frac{dt}{t}$ diverge, pour x tend vers 0 ou vers $+\infty$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ n'est donc jamais intégrable sur $]0, 1]$ ou $[1, +\infty[$.
- Si $\alpha \neq 1$, l'intégrale indéfinie est une primitive de la fonction f qui est $F(x) = \frac{x^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}$ et on a donc deux cas : si $\alpha < 1$ on a

$$F(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{1-\alpha} \quad \text{et} \quad F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

tandis que si $\alpha > 1$ on a

$$F(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty \quad \text{et} \quad F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{1-\alpha}$$

On voit donc que la fonction F atteint une limite finie en 0 si $\alpha < 1$, et qu'elle atteint une limite finie en $+\infty$ si $\alpha > 1$.

Pour un réel $a \in]0, +\infty[$, on obtient le même résultat car l'identité de Chasles donne une différence finie entre les intégrales. \square

La proposition suivante est un raffinement utile de la Proposition 2.54 lorsque $I = [a, b[$:

Proposition 2.67. Soit $f, g \in \mathcal{C}_m([a, b[)$ deux fonctions positives, avec $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$. On suppose que $f(x) \underset{x \rightarrow b}{\sim} g(x)$. Alors nous avons les deux résultats suivants :

- Si g est intégrable sur $[a, b[$ alors f l'est aussi et $\int_x^b f \underset{x \rightarrow b}{\sim} \int_x^b g$;
- Si g n'est pas intégrable sur $[a, b[$ alors f ne l'est pas non plus et $\int_a^x f \underset{x \rightarrow b}{\sim} \int_a^x g$.

Démonstration. On va prouver le premier point. On suppose que g est intégrable, donc f est intégrable par la proposition 2.54. D'autre part, cela implique par le Corollaire 2.65 que $\int_x^b g \xrightarrow{x \rightarrow b} 0$. Le fait que f est équivalente à g en b signifie qu'il existe une fonction continue $\epsilon : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ qui tend vers 0 quand x tend vers b et telle que $f(t) = g(t)(1 + \epsilon(t))$. En particulier la fonction ϵ est bornée sur $[a, b[$. Fixons $x \in [a, b[$ et notons $\|\epsilon\|_{[x, b[} = \sup_{t \in [x, b[} (\epsilon(t))$; alors ce nombre réel tend vers 0 quand x tend vers b d'après l'hypothèse sur ϵ . Nous avons par l'inégalité triangulaire continue et par positivité de la fonction g :

$$\left| \int_x^b f - \int_x^b g \right| = \left| \int_x^b (1 + \epsilon)g - \int_x^b g \right| = \left| \int_x^b g\epsilon \right| \leq \int_x^b g|\epsilon| \leq \|\epsilon\|_{[x, b[} \int_x^b g$$

Comme $\|\epsilon\|_{[x, b[}$ tend vers 0 quand x tend vers b , cela signifie qu'on a donc que $\int_x^b f = \int_x^b g + o_{x \rightarrow b} \left(\int_x^b g \right)$ c'est à dire que $\int_x^b f \underset{x \rightarrow b}{\sim} \int_x^b g$. \square

Remarque 2.68. Cette proposition est très utile et est valide aussi avec grand O et petit o en b .

Exemple 2.69. Etudions l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$. Sur $[1, +\infty[$, on a $\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \leq e^{-t}$ donc pour tout $x \in [1, +\infty[$, on a

$$0 \leq \int_1^x e^{-t} dt = -e^{-x} + e^{-1} \leq e^{-1}$$

L'intégrale indéfinie est majorée donc l'intégrale indéfinie est majorée sur $[1, +\infty[$. Etant croissante, elle converge, vers une limite (positive) finie. On ne sait pas la calculer mais on a prouvé son existence. Cela veut dire que la fonction continue positive $t \mapsto \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. Nous cherchons à avoir un équivalent de la fonction $x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$ quand x tend vers $+\infty$. Nous pouvons intégrer par parties :

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \left[-\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \right]_x^{+\infty} - \frac{1}{2} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^{\frac{3}{2}}} dt = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^{\frac{3}{2}}} dt$$

Nous avons que $\frac{e^{-t}}{t^{\frac{3}{2}}} = o_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \right)$ donc en appliquant la Proposition 2.67 à la version petit o on a :

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^{\frac{3}{2}}} dt = o_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \right)$$

Et donc on a :

$$\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt + o_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \right)$$

ce qui revient à :

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$$

Nous avons bien étudié les fonctions positives intégrables sur des intervalles quelconques ou semi-ouverts. Nous avons aussi étudié les fonctions de classe L^1 sur les intervalles quelconques. Nous allons maintenant utiliser la Proposition 2.63 pour définir un nouveau type d'intégration qui est plus faible que les fonctions de classe L^1 . Ce type de définition ne peut se faire que sur les intervalles semi-ouverts du type $[a, b[$ ou $]a, b]$. Pour l'instant prenons $I = [a, b[$ même si toutes les notions mathématiques développées s'appliquent aussi aux intervalles semi-ouverts du type $]a, b]$. Pour plus de facilité, introduisons la convention suivante : on appelle souvent *intégrale impropre* le symbole $\int_{[a,b[} f$. Attention dans ce cas, l'utilisation du symbole $\int_{[a,b[} f$ ne préjuge en rien de l'intégrabilité ou non de f , qu'on détermine grâce à la définition suivante, qui étend l'observation de la Proposition 2.63 à toutes les fonctions continues par morceaux.

Définition 2.70. Soit $f \in \mathcal{C}_m([a, b[)$ une fonction qui peut changer de signe, avec $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$. On dit que l'intégrale impropre $\int_{[a,b[} f$ converge si l'intégrale indéfinie $x \mapsto \int_a^x f$ admet une limite finie en b . Si tel est le cas on pose :

$$\int_{[a,b[} f = \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f$$

Plus précisément, on dit que l'intégrale impropre $\int_{[a,b[} f$ est semi-convergente si l'intégrale indéfinie $\int_a^x f$ converge lorsque x tend vers b mais pas $\int_a^x |f|$, et on dit que l'intégrale impropre $\int_{[a,b[} f$ est absolument convergente si f est intégrable sur $[a, b[$ (dans le sens de la Définition 2.57), i.e. si $f \in L^1([a, b[)$.

Remarque 2.71. La notion de classe L^1 coïncide ici avec celle de la Définition 2.60. Attention dans la Définition 2.70, on ne parle pas de l'intégrabilité de la fonction f – qui n'a de sens que dans le cadre de la Définition 2.60 – mais de la convergence ou non de son intégrale impropre.

Exemple 2.72. Prenons la fonction continue suivante :

$$f : [\pi, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \frac{\sin(x)}{x}$$

Nous voulons montrer que l'intégrale impropre $\int_{\pi}^{+\infty} f$ est semi-convergente, c'est à dire que l'intégrale indéfinie de la fonction f converge sur $[\pi, +\infty[$, mais pas l'intégrale indéfinie de la fonction $|f|$. Tout d'abord, on peut montrer par intégration par partie que l'intégrale indéfinie de f a une limite finie en $+\infty$. En effet, pour tout $x \geq \pi$, on a :

$$\int_{\pi}^x \frac{\sin(t)}{t} dt = \left[-\frac{\cos(t)}{t} \right]_{\pi}^x - \int_{\pi}^x \frac{\cos(t)}{t^2} dt$$

Le premier membre de droite tend vers $\frac{1}{\pi}$ quand x tend vers l'infini, et le deuxième membre de droite est de classe L^1 – c'est à dire l'intégrale impropre $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt$ est absolument convergente – car $\left| \frac{\cos(t)}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}$ qui est intégrable en $+\infty$. On a donc que la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\pi}^x \frac{\sin(t)}{t} dt$ existe et est finie, donc l'intégrale impropre $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est convergente. Par contre, minorons l'intégrale $\int_{\pi}^{n\pi} |f|$:

$$\int_{\pi}^{n\pi} \left| \frac{\sin(t)}{t} \right| dt = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} dt \geq \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{(k+1)\pi} dt = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}$$

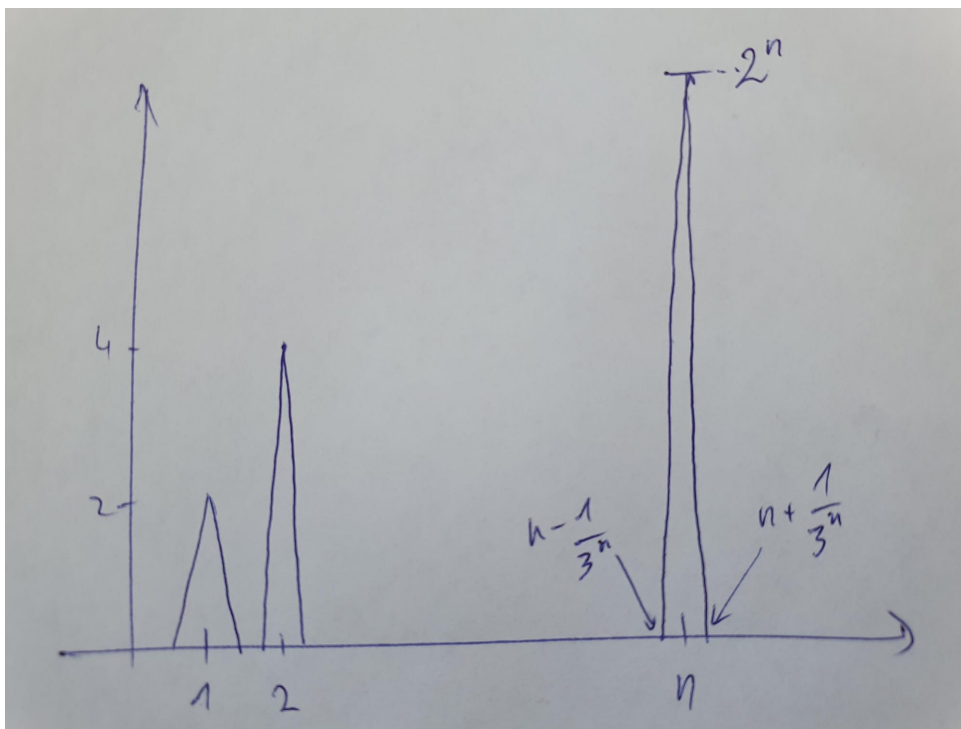
La série de droite diverge donc l'intégrale de gauche diverge aussi, donc $|f|$ n'est pas intégrable.

Remarque 2.73. Attention, si $f, g \in \mathcal{C}_m([a, b[)$ sont deux fonctions qui ne sont pas toutes les deux positives et telles que $f+g$ est intégrable sur $[a, b[$, on n'a pas forcément $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$, car f ou g n'est pas forcément intégrable sur $[a, b[$. Un exemple est de prendre $0 < a < b$ et de poser $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \frac{e^{-at}}{t}$ et $g :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto -\frac{e^{-bt}}{t}$. La somme $f+g$ est positive et intégrable (faire un développement limité en 0) mais pas chaque fonction f et g prise indépendamment, car les intégrales indéfinies de fonctions positives $\int_1^x \frac{e^{-at}}{t}$ et $\int_1^x \frac{e^{-bt}}{t}$ divergent en 0.

Remarque 2.74. Attention, il est faux de croire que si une fonction $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ positive est intégrable, alors f est bornée. Prenons la fonction illustrée dans le dessin et calculons son intégrale sur un segment $[0, n + \frac{1}{3^n}]$ grâce à la formule aire d'un triangle = base \times hauteur divisé par 2 :

$$\int_0^{n + \frac{1}{3^n}} f = \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} \times 2^k = \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{2}{3} \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} = 2 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$$

Cette intégrale tend vers 2 quand n tend vers l'infini, donc f est intégrable, mais elle n'est absolument pas bornée.

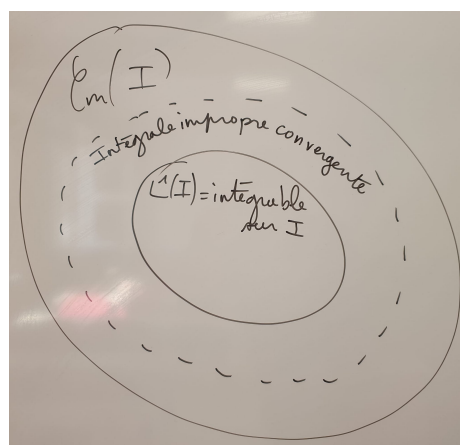


Définition 2.75. Soit $f \in C_m(]a, b[)$, avec $a < b \in \mathbb{R}$ ou $a = -\infty$ ou $b = +\infty$. On dit que l'intégrale impropre $\int_{]a, b[} f$ converge si, quelque soit $c \in]a, b[$, l'intégrale indéfinie $\int_x^c f$ admet une limite finie en a et l'intégrale indéfinie $\int_c^x f$ admet une limite finie en b . Si tel est le cas on pose :

$$\int_{]a, b[} f = \lim_{x \rightarrow a} \int_x^c f + \lim_{x \rightarrow b} \int_c^x f$$

Plus précisément, on dit que l'intégrale impropre $\int_{]a, b[} f$ est semi-convergente si, quelque soit $c \in]a, b[$, l'intégrale indéfinie $\int_x^c f$ admet une limite finie en a et l'intégrale indéfinie $\int_c^x f$ admet une limite finie en b , mais pas $\int_x^c |f|$ ou pas $\int_c^x |f|$, et on dit que l'intégrale impropre $\int_{]a, b[} f$ est absolument convergente si f est intégrable sur $]a, b[$ (dans le sens de la Définition 2.57), i.e. si $f \in L^1(]a, b[)$.

Cette définition définit des fonctions qui sont intégrables dans un sens "faible" que celle d'intégration au sens de la Définition 2.57, c'est à dire celles dont l'intégrale indéfinie admet une limite finie. La Définition 2.75 offre une notion d'intégrabilité moins rigide que la Définition 2.57, mais n'a vraiment d'utilité que pour les fonctions qui ne sont pas de signe constant, car dans ce dernier cas la Proposition 2.63 nous dit que Définition 2.57 et 2.75 coïncident. L'ensemble des fonctions dont l'intégrale impropre converge est ainsi un ensemble plus large que l'ensemble des fonctions intégrables au sens de la Définition 2.57, comme par exemple la fonction de l'Exemple 2.72 a une intégrale impropre semi-convergente mais n'est pas intégrable sur $[\pi, +\infty[$.



Ceci étant dit, la Définition 2.75 nous permet de savoir de façon efficace si une fonction de signe constant est intégrable dans le sens de la Définition 2.57, comme l'illustrent les deux exemples suivants.

Exemple 2.76. Etudions la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_1^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$$

La fonction $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ est continue donc F est une primitive de f . Comme f est positive donc F' est positive donc F est croissante sur $]0, +\infty[$. Dans ce cas, d'une part comme $F(1) = 0$ on a que F est négative quand $x \leq 1$ et positive quand $x \geq 1$, et d'autre part quand x tend vers $+\infty$ (resp. 0), soit F tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), soit F tend vers une limite finie.

1. en $+\infty$: sur $[1, +\infty[$, on a $f(t) \leq e^{-t}$ donc pour tout $x \in [1, +\infty[$, on a

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt \leq \int_1^x e^{-t} dt = -e^{-x} + e^{-1} \leq e^{-1}$$

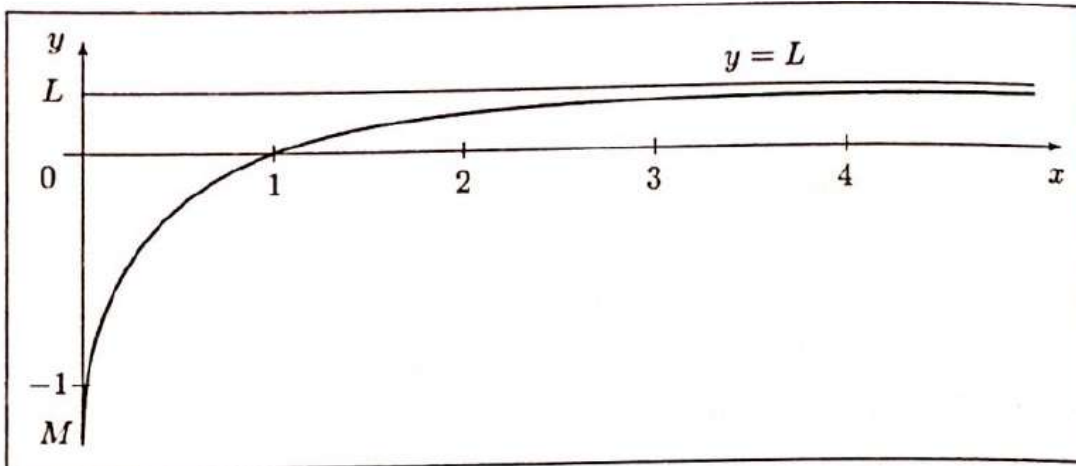
L'intégrale indéfinie est majorée donc F est majorée sur $[1, +\infty[$. Etant croissante, elle converge, vers une limite (positive) finie notée L_+ . On ne sait pas la calculer mais on a prouvé son existence ;

2. en 0 : sur $]0, 1]$, on a $f(t) \leq \frac{1}{\sqrt{t}}$ donc $-\frac{1}{\sqrt{t}} \leq -f(t)$. Pour tout $x \in]0, 1]$, on a

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt = - \int_x^1 f(t) dt \geq - \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = -2(1 - \sqrt{x}) \leq -2$$

La fonction F étant croissante minorée, elle tend vers une limite (négative) finie en 0, notée L_- , lorsque x tend vers 0. On ne sait pas le calculer mais on a prouvé son existence.

Eventuellement on peut dire que f est intégrable sur $]0, +\infty[$ et que son intégrale vaut $L_+ + L_-$. Comme on connaît la dérivée de F - c'est f - on peut tracer son graphe. Comme la fonction f est positive, elle est intégrable sur $]0, +\infty[$ dans le sens de la Définition 2.57.



Exemple 2.77. On définit la fonction Γ d'Euler par :

$$\Gamma :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \int_0^{+\infty} y^{x-1} e^{-y} dy$$

Il faut vérifier qu'elle est bien définie. Soit $x > 0$, nous avons :

$$y^{x-1} e^{-y} \underset{y \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{y^{1-x}} \quad \text{et} \quad y^{x-1} e^{-y} = \underset{y \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{y^2} \right)$$

De la Proposition 2.66 on déduit que la fonction $y \mapsto \frac{1}{y^{1-x}}$ est une fonction intégrable en 0 car $1-x < 0$, et que la fonction $y \mapsto \frac{1}{y^2}$ est clairement intégrable en $+\infty$. De la Proposition 2.67, on déduit que la fonction $y \mapsto y^{x-1}e^{-y}$ est intégrable en 0 et en $+\infty$, et donc que son intégrale la fonction Γ est bien définie pour tout $x > 0$. Comme la fonction intégrée est positive, cette fonction est intégrable dans le sens de la Définition 2.57.

Définition 2.78. Soit $f \in \mathcal{C}_m(I)$. On appelle primitive de f toute fonction continue $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I (ou du moins son intérieur) telle que :

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x)$$

Remarque 2.79. Comme f est continue par morceaux, elle est automatiquement intégrable sur tout segment de I mais pas forcément sur I entier.

La primitivisation est la procédure inverse de la dérivation. D'après le Corollaire 2.40, on sait que l'intégrale indéfinie d'une fonction continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est la primitive de f qui s'annule en a , qu'on note habituellement F_0 . Maintenant, prenons par exemple une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur un intervalle quelconque I , et on suppose que f est intégrable sur tout segment inclus dans I . Soit $a \in I$ un point de l'intérieur de l'intervalle I , c'est à dire un point qui n'est pas une extrémité. L'intégrale indéfinie de f existe toujours pour tout $x \in I$, y compris pour $x \leq a$ puisque $\int_a^x f = -\int_x^a f$, et cette dernière intégrale est bien définie. Le Corollaire 2.40 s'applique alors au segment $[a, x]$ (ou $[x, a]$ dans le cas où $x < a$) et nous dit que la primitive de f existe dans les deux cas. On a donc une version du premier théorème fondamental de l'analyse – ou plutôt du Corollaire 2.40 – pour les intervalles quelconques :

Proposition 2.80. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle I et soit $a \in I$ qui n'est pas une extrémité de I . Alors l'intégrale indéfinie de f qui est donnée par :

$$\forall x \in I, \quad F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

est la primitive de f qui s'annule en a .

Définition 2.81. On appelle fonction logarithme (Népérien) la primitive (sur $]0, +\infty[$) de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ qui s'annule en 1 :

$$\forall x \in]0, +\infty[\quad \ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

Remarque 2.82. La fonction logarithme est étudiée page 127 du Liret-Martinais.

Exemple 2.83. La primitive de la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est la fonction arctangente. Plus précisément :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$$

Maintenant soit $\alpha > 0$, on a alors :

$$\int_0^x \frac{dt}{\alpha^2 + t^2} = \frac{1}{\alpha} \int_0^x \frac{1}{1 + (\frac{t}{\alpha})^2} \frac{dt}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\frac{x}{\alpha}} \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{\alpha} \arctan\left(\frac{x}{\alpha}\right)$$

Primitives des fonctions usuelles

Dans chaque ligne, F est une primitive de f sur l'intervalle I . Ces primitives sont uniques à une constante près notée C .

$f(x)$	I	$F(x)$
λ (constante)	\mathbb{R}	$\lambda x + C$
x	\mathbb{R}	$\frac{x^2}{2} + C$
x^n ($n \in \mathbb{N}^*$)	\mathbb{R}	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$] -\infty, 0[$ ou $] 0, +\infty[$	$\ln x + C$
$\frac{1}{x^n}$ où $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$	$] -\infty, 0[$ ou $] 0, +\infty[$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$] 0, +\infty[$	$2\sqrt{x} + C$
$\ln x$	\mathbb{R}_+^*	$x \ln x - x + C$
e^x	\mathbb{R}	$e^x + C$
$\sin x$	\mathbb{R}	$-\cos x + C$
$\cos x$	\mathbb{R}	$\sin x + C$
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$	$\tan x + C$

Opérations et primitives

On suppose que u est une fonction dérivable sur un intervalle I

- Une primitive de $u'u^n$ sur I est $\frac{u^{n+1}}{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)
- Une primitive de $\frac{u'}{u^2}$ sur I est $-\frac{1}{u}$.
- Une primitive de $\frac{u'}{u^n}$ sur I est $-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$. ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.)
- Une primitive de $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ sur I est $2\sqrt{u}$ (En supposant $u > 0$ sur I .)
- Une primitive de $\frac{u'}{u}$ sur I est $\ln |u|$.
- Une primitive de $u'e^u$ sur I est e^u .

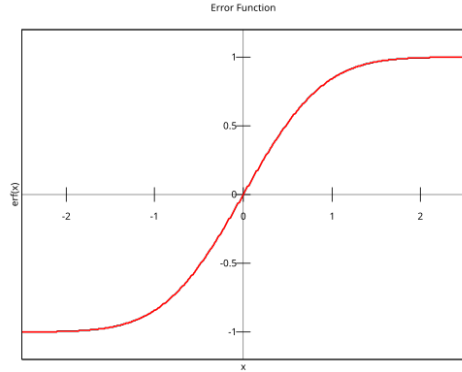
En particulier, si $u > 0$ sur I et si $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, une primitive de $u'u^a$ sur I est :

$$\int u'u^a = \begin{cases} \frac{1}{a+1}u^{a+1} + C & \text{si } a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\ \ln u + C & \text{si } a = -1 \end{cases}$$

Remarque 2.84. Il est conseillé d'aller lire le Chapitre 10 du Liret-Martinais sur les primitives pour plus de détails sur le sujet.

Exemple 2.85. Il existe des primitives qui ne peuvent pas s'exprimer sous la forme de fonctions usuelles. C'est le cas de la *fonction d'erreur* :

$$\forall x \geq 0 \quad \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$



Définition 2.86. On dit qu'une courbe paramétrée $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ est de classe \mathcal{C}^1 (resp. régulière) par morceaux si

1. il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $n + 1$ points du segment $[a, b]$, tels que :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

2. la restriction de γ à chaque intervalle ouvert $]x_{k-1}, x_k[$ est de classe \mathcal{C}^1 (resp. régulière) et prolongeable par continuité aux extrémités gauche et droite.

Soit I un intervalle quelconque. On dit qu'une courbe paramétrée $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ est de classe \mathcal{C}^1 (resp. régulière) par morceaux sur I si elle est de classe \mathcal{C}^1 (resp. régulière) par morceaux sur tout segment inclus dans I .

Remarque 2.87. En particulier, aux points x_k , la courbe paramétrée γ_1 est continue mais pas forcément dérivable. Elle peut être cependant dérivable à gauche et à droite de ces points de jonctions, mais ses dérivées à gauche et à droite ne coïncident pas forcément, et ne coïncident pas forcément non plus avec le prolongement par continuité de la dérivée définie sur les segments ouverts $]x_{k-1}, x_k[$.

Exemple 2.88. Soit $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, |t|)$ la courbe paramétrée associée à la fonction valeur absolue, c'est à dire dont le support est le graphe de la valeur absolue. Si on prend $I_1 =]-\infty, 0]$ et $I_2 =]0, +\infty[$ alors γ est \mathcal{C}^1 par morceaux vis à vis de cette partition.

Définition 2.89. Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée de classe \mathcal{C}^1 par morceaux. Une *abscisse curviligne* de γ est une primitive de la fonction $t \mapsto \|\vec{\gamma}'(t)\|$. Plus précisément, si $t_0 \in I$, alors les *abscisses curvilignes* de γ sont les fonctions du type :

$$s : I \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto s_0 + \int_{t_0}^t \|\vec{\gamma}'(x)\| dx$$

où $s_0 \in \mathbb{R}$ est une constante d'intégration.

Exemple 2.90. Reprenons le cercle paramétré de l'Exemple 1.64 de centre $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et de rayon $R > 0$. Le vecteur vitesse est donné par $\vec{\gamma}'(t) = R \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$. Sa norme est donc $\|\vec{\gamma}'(t)\| = R$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$. On a donc que la primitive de la fonction $t \mapsto \|\vec{\gamma}'(t)\|$ qui s'annule en 0 est l'abscisse curviligne donnée par

$$\forall t \in [0, 2\pi] \quad s(t) = \int_0^t \|\vec{\gamma}'(x)\| dx = \int_0^t R dx = Rt$$

L'abscisse curviligne est donc proportionnelle au temps t , par un facteur égal au rayon du cercle.

Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée qui admet une abscisse curviligne $s : I \rightarrow \mathbb{R}$, c'est à dire dont la fonction positive $t \mapsto \|\vec{\gamma}'(t)\|$ admet une primitive. Comme la fonction $t \mapsto \|\vec{\gamma}'(t)\|$ est positive ou nulle, l'abscisse curviligne s est une fonction croissante, même strictement croissante (et donc bijective) si γ est régulière (par morceaux). Cela veut dire que son image $J = s(I)$ est un intervalle. Nous pouvons alors définir une nouvelle courbe paramétrée par l'abscisse curviligne, qu'on note $\gamma_s : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ et qui est définie par :

$$\forall t \in I \quad \gamma_s(s(t)) = \gamma(t)$$

L'abscisse curviligne a la propriété que si on dérive à gauche et à droite du signe égale, on obtient par la règle des chaines :

$$\forall t \in I \quad s'(t) \times \vec{\gamma}'_s(s(t)) = \vec{\gamma}'(t)$$

Et donc en prenant la norme et en se rappelant que $s'(t) = \|\vec{\gamma}'(t)\|$ puisque c'est une primitive de la fonction $t \mapsto \|\vec{\gamma}'(t)\|$, on obtient

$$\forall t \in I \quad \|\vec{\gamma}'(t)\| \times \|\vec{\gamma}'_s(s(t))\| = \|\vec{\gamma}'(t)\|$$

Pour tous les temps $t \in I$ pour lesquels $\|\vec{\gamma}'(t)\| \neq 0$, on a $\|\vec{\gamma}'_s(s(t))\| = 1$. C'est en particulier le cas si la courbe paramétrée est régulière. Si la courbe paramétrée est de classe \mathcal{C}^1 , alors la fonction vectorielle $t \mapsto \vec{\gamma}'(t)$ est continue, et donc la fonction $t \mapsto \frac{\vec{\gamma}'(t)}{\|\vec{\gamma}'(t)\|}$ est une fonction continue partout où $\vec{\gamma}'(t) \neq (0, 0)$, et elle est prolongeable par continuité en ces points là (encore car γ est \mathcal{C}^1), donc $\|\vec{\gamma}'_s(s(t))\| = 1$ pour tout $t \in I$. Si la courbe γ est \mathcal{C}^1 par morceaux, c'est aussi le cas car la dérivée est prolongeable par continuité aux extrémités des intervalles qui partitionnent I donc l'argument reste le même. Ainsi, si γ admet une abscisse curviligne, on déduit que :

$$\forall t \in I \quad \|\vec{\gamma}'_s(s(t))\| = 1$$

Et comme la fonction f est croissante, l'image de I par s est un intervalle, noté J , et on a donc :

$$\forall s \in J \quad \|\vec{\gamma}'_s(s)\| = 1$$

Cela veut dire que γ_s est paramétrée normalement, et on retrouve bien la Définition 1.114. Attention, la fonction $s : I \rightarrow J$ n'est pas forcément inversible, et encore moins un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme, car en certain temps t , on peut avoir $\|\vec{\gamma}'(t)\| = 0$. Par contre, dans le cas où γ est régulière, la dérivée de s ne s'annule jamais et donc la dérivée de la fonction inverse non plus et un choix d'abscisse curviligne définit une \mathcal{C}^1 -équivalence entre la courbe paramétrée γ et la courbe paramétrée $\gamma_s(s(t))$.

Remarque 2.91. Nous pouvons désormais prouver la Proposition 1.117 car il suffit de choisir une primitive de la fonction $t \mapsto \|\vec{\gamma}'(t)\|$ qui est une fonction continue strictement positive, donc sa primitive est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme croissant.

Exemple 2.92. L'abscisse curviligne de la parabole de l'Exemple 1.112 a été donnée dans l'Exemple 1.119. En réalité, c'est la primitive qui s'annule en 0 de la fonction $t \mapsto \|\vec{\gamma}'(t)\| = \sqrt{(2t)^2 + 1}$.

Exemple 2.93. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 , et $\gamma_f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ la courbe paramétrée définie dans l'Exemple 1.62. Dans ce cas le vecteur vitesse est donné par $\vec{\gamma}'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix}$. Alors une abscisse curviligne de γ_f est une fonction $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall t \in I \quad s'(t) = \sqrt{1 + (f'(t))^2}$$

Ce n'est pas toujours facile d'intégrer une telle fonction ! Par contre, avec le théorème de Pythagore, on voit que la longueur $\sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$ est la longueur infinitésimale du graphe de f entre le point $(t, f(t))$ et $(t + dt, f(t + dt)) \simeq (t + dt, f(t) + dt f'(t))$. On comprend que l'intégrale de la fonction $t \mapsto \sqrt{1 + (f'(t))^2}$ – c'est à dire l'abscisse curviligne – mesure la longueur du graphe de f ! On peut généraliser cette observation à n'importe quel arc paramétré.

Définition 2.94. Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une courbe paramétrée de classe \mathcal{C}^1 par morceaux. Alors la longueur de son support est donnée par la formule :

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \left\| \vec{\gamma}'(t) \right\| dt$$

Exemple 2.95. Nous pouvons calculer la longueur du cercle paramétré dans l'Exemple 1.64, dont une abscisse curviligne avait été donnée dans l'Exemple 2.90. On a donc :

$$\ell(\gamma) = \int_0^{2\pi} \left\| \vec{\gamma}'(x) \right\| dx = 2\pi R$$

Ceci correspond bien au périmètre d'un cercle de rayon R !

Exemple 2.96. Nous pouvons maintenant expliquer la formule de l'abscisse curviligne de l'Exemple 1.118. La norme du vecteur vitesse de la cycloïde satisfait, pour tout $t \in [0, 2\pi]$:

$$\left\| \vec{\gamma}'(t) \right\| = a \sqrt{(a - \cos(t))^2 + \sin(t)^2} = a \sqrt{2(1 - \cos(t))} = 2a \sin\left(\frac{t}{2}\right)$$

On peut l'intégrer sur $[0, 2\pi]$, et on choisit l'abscisse curviligne nulle en 0 :

$$\forall t \in [0, 2\pi] \quad s(t) = 2a \int_0^t \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx = 4a (1 - \cos\left(\frac{t}{2}\right))$$

La longueur du support de l'arc paramétré est donc de $8a$, c'est bien la longueur de l'intervalle $]0, 8a[$ de l'Exemple 1.118.

Définition 2.97. Soit $[a, b]$ et $[c, d]$ deux segments et $u : [a, b] \rightarrow [c, d]$ un homéomorphisme (c'est à dire une bijection continue dont la réciproque est continue). Soit $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$ deux courbes paramétrées de classe \mathcal{C}^1 par morceaux. On dit qu'elles sont \mathcal{C}^1 -équivalentes vis à vis de $u : [a, b] \rightarrow [c, d]$ si, pour toute subdivision $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ de $[a, b]$ qui satisfait la Définition 2.86 pour γ_1 , la restriction de $u : [a, b] \rightarrow [c, d]$ à chaque intervalle ouvert $]x_k, x_{k+1}[$ – dénotée u_k – satisfait les conditions suivantes :

- c'est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme dont la dérivée est prolongeable par continuité en x_k et x_{k+1} ,
- la restriction de γ_1 à $]x_{k-1}, x_k[$ est \mathcal{C}^1 -équivalente à la restriction de γ_2 à $u(]x_{k-1}, x_k[)$ via la restriction u_k .

Soit I et J deux intervalles quelconques et soit $u : I \rightarrow J$ un homéomorphisme. Soit $\gamma_1 : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $\gamma_2 : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ deux courbes paramétrées de classe \mathcal{C}^1 par morceaux. On dit qu'elles sont \mathcal{C}^1 -équivalentes vis à vis de $u : I \rightarrow J$ si, pour tout segment $[a, b] \subset I$, elles sont \mathcal{C}^1 -équivalentes vis à vis de $u : [a, b] \rightarrow u([a, b])$.

Remarque 2.98. Comme $u : [a, b] \rightarrow [c, d]$ est un homéomorphisme, il est strictement croissant ou décroissant.

Proposition 2.99. La longueur d'une courbe paramétrée \mathcal{C}^1 par morceaux est une notion géométrique, c'est à dire qu'elle est invariante par \mathcal{C}^1 -équivalence.

Démonstration. Cela provient de la formule de changement de variable. Soit $[a, b]$ et $[c, d]$ deux segments et $u : [a, b] \rightarrow [c, d]$ un homéomorphisme (c'est à dire une bijection continue dont la réciproque est continue). Soit $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$ deux courbes paramétrées de classe \mathcal{C}^1 par morceaux qui sont \mathcal{C}^1 -équivalentes vis à vis de $u : [a, b] \rightarrow [c, d]$. En particulier elles ont le même support (la même image). Par la formule de changement de variable nous avons donc :

$$\ell(\gamma_2) = \int_c^d \left\| \vec{\gamma}'_2(x) \right\| dx = \int_a^b \left\| \vec{\gamma}'_2(u(t)) \right\| |u'(t)| dt$$

mais d'autre part comme $\gamma_2(u(t)) = \gamma_1(t)$, on a $u'(t) \times \gamma'_2(u(t)) = \gamma'_1(t)$, et donc on a $\left\| \vec{\gamma}'_2(u(t)) \right\| |u'(t)| = \left\| \vec{\gamma}'_1(t) \right\|$, ce qui donne :

$$\ell(\gamma_2) = \int_c^d \left\| \vec{\gamma}'_2(x) \right\| dx = \int_a^b \left\| \vec{\gamma}'_2(u(t)) \right\| |u'(t)| dt = \int_a^b \left\| \vec{\gamma}'_1(t) \right\| dt = \ell(\gamma_1)$$

L'égalité est donc confirmée. □

Corollaire 2.100. *Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, et soit s une abscisse curviligne de γ . La longueur du support $\text{Im}(\gamma)$ est donnée par $s(b) - s(a)$ (et ne dépend pas du choix de s). En particulier, si $s(a) = 0$, alors $\ell(\gamma) = s(b)$.*

Démonstration. La fonction s est une primitive de la fonction $t \mapsto \left\| \vec{\gamma}'(t) \right\|$. Le deuxième théorème fondamental de l'analyse nous permet de conclure. □